华中科技大学

博士学位论文

无穷维空间上的随机微分方程

姓名：曹桂兰

申请学位级别：博士

专业：概率论与数理统计

指导教师：任佳刚

20050606

摘要

本文我们主要研究无穷维空间上的随机微分方程，包括以下内容：

1 Hilbert 空间上的带跳随机微分方程

设 K 和 H 为两个实可分 Hilbert 空间，$(U,\mathcal{E},n)$ 为一 σ 有限测度空间．$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 为一完备带流的概率空间， W 为其上 K 值柱 Q-Brown 运动， p 为其上 U 值拟左连续平稳 Poisson 点过程，N_p, $\hat{N}_p$ 和 n 分别为 p 的计数测度，补偿测度和特征测度． $U_0\in\mathcal{E}$，且满足 $n(U-U_0)<+\infty$.

考虑如下 H 值非 Markov 型带跳随机微分方程：

$$\begin{aligned} X_t &= X_0+\int_0^t\sigma(s,X)\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t b(s,X)\,\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{U_0}f(s,X,u)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u)\\ &\quad+\int_0^t\int_{U-U_0}f(s,X,u)N_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u). \end{aligned} \tag{1}$$

在文章 [54] 中我们证明了如下结果：

定理 1 设

(1) 存在函数 $H(t,u):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足：

(1a) $H(t,u)$ 对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 关于 t 局部可积，对固定的 $t\in\mathbb{R}_+$ 关于 u 为连续增函数，

(1b) $\forall t>0$, $X\in\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}(H))$ 有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\|\sigma(t,X)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}\right)+\mathbb{E}\left(\|b(t,X)\|^p\right)+\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(t,X,u)\|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\\ &+\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(t,X,u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\\ \leqslant\ & H\left(t,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r\|^p\right)\right), \end{aligned}$$

(1c) $\forall K>0$ 及初值 $u_0\geqslant 4^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right)$, 方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=KH(t,u)$$

有全局解.

(2) 存在函数 $G(t,u):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足：

(2a) $G(t,u)$ 对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 关于 t 局部可积，对固定的 $t\in\mathbb{R}_+$ 关于 u 为连续增函数，且 $G(t,0)=0$,

(2b) $\forall t>0$, $X,Y\in\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}(H))$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}\right)+\mathbb{E}\left(\|b(t,X)-b(t,Y)\|^p\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(t,X,u)-f(t,Y,u)\|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(t,X,u)-f(t,Y,u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\\
\leqslant\ & G\left(t,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r-Y_r\|^p\right)\right),
\end{aligned}$$

(2c) $\forall K>0$, 若 $\mathbb{R}_+$ 上的非负函数 Z 满足 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$Z_t\leqslant K\int_0^t G(s,Z_s)\,\mathrm{d}s,$$

可得 $Z\equiv 0$.

则方程 (1) 的解存在且满足轨道唯一性.

需要说明的是，我们给出的条件是非常弱的，现有的关于非 Lipschitz 系数的随机微分方程解的存在唯一性的结果一般都可作为其特例给出．另外，此类方程的涵盖面是非常广的，在文中我们只给出一个简单的例子，它包括了环的同胚群上的 Brown 运动 (参看 [2, 1]).

注意到由于方程 (1) 中纯跳随机积分项的存在，在用逐次逼近考察解的存在性的时候, 我们会遇到带跳项的矩估计问题. 为此, 我们证明了如下的类似于 Burkholder-Davis-Gundy 不等式的一个结果：

定理 2 若 $p\geqslant 2$, $f\in\mathcal{F}^2_{\mathrm{loc}}(H)$, $M_t=\int_0^t\int_U f(s,u)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u)$, 则存在常数 $K_{p,t}>0$, 使得 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{s\leqslant t}\|M_s\|^p\right)\ \leqslant\ & K_{p,t}\int_0^t\Bigg(\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\Bigg)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

2 Hilbert 空间上的倒向随机微分方程

考虑如下 H 值半线性倒向随机微分方程 $(Q=I)$:

$$X_T = X_t + \int_t^T (\sigma(s,X_s)+Y_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_t^T b(s,X_s,Y_s)\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

在文章 [67] 中我们证明了如下结果：

定理 3 设

(1) 存在函数 $H(t,u):[0,T]\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足：

(1a) $H(t,u)$ 对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 有 $\int_0^T H(s,u)\,\mathrm{d}s<+\infty$, 对固定的 $t\in[0,T]$ 关于 u 为连续增函数,

(1b) 存在常数 $C>0$, 使 $\forall t\in[0,T]$, $X\in\mathcal{L}^2(\Omega,H)$, $Y\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{L}_2)$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\sigma(t,X)\|^2_{\mathcal{L}_2} &\leqslant H\left(t,\mathbb{E}\|X\|^2\right),\\ \mathbb{E}\|b(t,X,Y)\|^2 &\leqslant H\left(t,\mathbb{E}\|X\|^2\right)+C\mathbb{E}\|Y\|^2_{\mathcal{L}_2},\end{aligned}$$

(1c) $\forall K>0$ 及终值 $u_T\geqslant0$, 方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-KH(t,u)$$

在 $[0,T]$ 有解.

(2) 存在函数 $G(t,u):[0,T]\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足：

(2a) $G(t,u)$ 对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 有 $\int_0^T G(s,u)\,\mathrm{d}s<+\infty$, 对固定的 $t\in[0,T]$ 关于 u 为连续增函数，且 $G(t,0)=0$,

(2b) $\forall t\in[0,T]$, $X,X'\in\mathcal{L}^2(\Omega,H)$, $Y,Y'\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{L}_2)$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\sigma(t,X)-\sigma(t,X')\|^2_{\mathcal{L}_2} &\leqslant G\left(t,\mathbb{E}\|X-X'\|^2\right),\\ \mathbb{E}\|b(t,X,Y)-b(t,X',Y')\|^2 &\leqslant G\left(t,\mathbb{E}\|X-X'\|^2\right)+C\mathbb{E}\|Y-Y'\|^2_{\mathcal{L}_2},\end{aligned}$$

(2c) $\forall K>0$, 若 $[0,T]$ 上的非负函数 Z 满足 $\forall t\in[0,T]$,

$$Z_t\leqslant K\int_t^T G(s,Z_s)\,\mathrm{d}s,$$

可得 $Z\equiv0$.

则方程 (2) 的解存在唯一.

3 Banach 空间上的随机微分方程

设 E 为一 $M-2$ 型实可分 Banach 空间， F 为另一实可分 Banach 空间， W 为 F 值 Brown 运动. 考虑如下的 E 值非 Markov 型随机微分方程：

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X)\,\mathrm{d}s. \tag{3}$$

类似于定理 1, 我们给出了非 Lipschitz 系数条件下方程 (3) 的解的存在唯一性的一个结果，具体参看文章 [48](已被应用数学录用).

4 由无穷个 Brown 运动驱动的随机微分方程

这部分工作来源于文章 [49](发表于 J.Funct.Anal.), 在那里我们考虑的是一维时齐的 Markov 型随机微分方程：

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s, \tag{4}$$

这里我们将其推广为多维非 Markov 型方程.

考虑如下 $\mathbb{R}^m$ 值非 Markov 型随机微分方程：

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X)\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

其中 $W=(W^1, W^2, \cdots)$, $\{W^j, j=1,2,\cdots\}$ 为某完备带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 运动.

此类方程实际上是 Hilbert 空间 l^2 值柱 I-Brown 运动驱动的随机微分方程的特殊情形. 我们仿照有限维的情形定义了弱解，强解，唯一强解等概念，并得到了与经典的随机微分方程的结果平行的一些结论，还给出了该类方程在非 Lipschitz 系数的条件下存在唯一强解的几个充分条件.

定理 4 方程 (5) 有唯一强解等价于它存在一个弱解且其解具有轨道唯一性.

定理 5 设 λ 为非负局部可积函数， ρ_1 和 ρ_2 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数，满足 $\rho_1(0)=\rho_2(0)=0$ 且 $\exists p \geqslant 2$, 使

$$\int_{0+} \frac{u^{p-1}}{\rho_1^p(u) + \rho_2^p(u)}\,\mathrm{d}u = +\infty.$$

若 $\|\sigma(t,0)\|$ 和 $|b(t,0)| \in \mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, 且 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $X, Y \in \mathcal{W}^m$, 有

$$\begin{aligned} \|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\| &\leqslant \sqrt[p]{\lambda(t)}\rho_1\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r - Y_r|\right), \\ |b(t,X)-b(t,Y)| &\leqslant \sqrt[p]{\lambda(t)}\rho_2\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r - Y_r|\right), \end{aligned}$$

则方程 (5) 有唯一强解.

关于方程 (5) 的弱解，我们通过证明如下的连续局部鞅的无穷维随机积分表示定理，得到了其弱解的存在性等价于某个鞅问题的解的存在性的结果．这部分工作取自文章 [65](已被华中科技大学学报 (自然科学版) 录用).

定理 6 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$ 满足通常条件， $M \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$, 且 $M_0 = 0$ a.s.. 若 $\exists \sigma \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m \otimes l^2)$, 使

$$[M^i, M^l]_t = \int_0^t (a_l^i)_s \, \mathrm{d}s, \qquad (i, l = 1, 2, \cdots, m),$$

其中 $a = \sigma\sigma^*$, 则存在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$ 的一个拓广 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ 及其上的无穷个相互独立的 $\tilde{\mathcal{F}}_t$-Brown 运动 $\tilde{W} = (\tilde{W}^1, \tilde{W}^2, \cdots)$, 使

$$M_t = \int_0^t \sigma_s \, \mathrm{d}\tilde{W}_s, \qquad \text{a.s..}$$

定理 7 设方程 (4) 的系数 σ 和 b 有界，且满足

(1) 存在 $\mathbb{R}_+$ 上的连续增函数 ρ, 满足 $\rho(0) = 0$ 及

$$\int_{0^+} \rho^{-2}(u) \, \mathrm{d}u = +\infty,$$

使 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leqslant \rho(|x - y|),$$

(2) 存在 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数 γ, 满足 $\gamma(0) = 0$ 及

$$\int_{0^+} \gamma^{-1}(u) \, \mathrm{d}u = +\infty,$$

使 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$|b(x) - b(y)| \leqslant \gamma(|x - y|),$$

则方程 (4) 有唯一强解.

随后，我们还进一步给出了方程 (4) 的解的强 Markov 性，非接触性和强比较定理等.

此外，考虑如下 $\mathbb{R}^m$ 值半线性倒向随机微分方程：

$$X_T = X_t + \int_t^T (\sigma(s, X_s) + Y_s) \, \mathrm{d}W_s + \int_t^T b(s, X_s, Y_s) \, \mathrm{d}s, \tag{6}$$

其中 $W = (W^1, W^2, \cdots)$, $\{W^j, j = 1, 2, \cdots\}$ 为完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 运动， $\mathcal{F}_t$ 为 W 生成的完备自然 σ 代数流， $T > 0$.

我们证明了如下定理：

定理 8 设 λ 为非负函数，且满足 $\int_0^T \lambda(s)\,\mathrm{d}s < +\infty$, ρ_1 和 ρ_2 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数，满足 $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0$ 且

$$\int_{0+} \frac{u}{\rho_1^2(u) + \rho_2^2(u)}\,\mathrm{d}u = +\infty.$$

若 $\sigma(t,\omega,0) \in \mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R}^m \otimes l^2)$, $b(t,\omega,0,0) \in \mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, 且 $\forall t \in [0,T]$, $X, X' \in \mathbb{R}^m$, $Y, Y' \in \mathbb{R}^m \otimes l^2$, 有

$$\begin{aligned}
\|\sigma(t,X) - \sigma(t,X')\| &\leqslant \sqrt{\lambda(t)}\rho_1(|X - X'|) \quad \text{a.s.}, \\
|b(t,X,Y) - b(t,X',Y')| &\leqslant \sqrt{\lambda(t)}\rho_2(|X - X'|) + C\|Y - Y'\| \quad \text{a.s.},
\end{aligned}$$

则方程 (6) 的解存在唯一.

5 双参数带跳随机微分方程

这部分工作来源于文章 [64](已被应用数学录用), 在那里我们考虑的是由一维 Brown 单驱动的非时齐的 Markov 型双参数带跳随机微分方程，这里我们将其推广为由无穷个 Brown 单驱动的非 Markov 型方程.

设 $W = (W^1, W^2, \cdots)$, $\{W^j, j = 1, 2, \cdots\}$ 为某完备带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_z)$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 单， Υ 为其上的 Poisson 单， Λ 为其强度测度，$N = \Upsilon - \Lambda$.

考虑如下双参数非 Markov 型带跳随机微分方程：

$$\begin{aligned}
X_z &= X_0 + \int_{R_z} \sigma(\xi, X)\,\mathrm{d}W_\xi + \int_{R_z} b(\xi, X)\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad + \int_{R_z} \alpha(\xi, X)\,\mathrm{d}\Lambda_\xi + \int_{R_z} \beta(\xi, X)\,\mathrm{d}N_\xi.
\end{aligned} \tag{7}$$

我们用类似的方法证明了下面的结果：

定理 9 设

(1) 存在函数 $H(z,u) : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ 满足：

(1a) $H(z,u)$ 对固定的 $u \in \mathbb{R}_+$ 关于 z 对 $\mathrm{d}B_z$ 局部可积，对固定的 $z \in \mathbb{R}_+^2$ 关于 u 为连续增函数，其中 $B_z = z + \Lambda_z$,

(1b) $\forall z \in \mathbb{R}_+^2$, $X \in \mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{D})$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\|\sigma(z,X)\|^p\right) + \mathbb{E}\left(|b(z,X)|^p\right) + \mathbb{E}(|\alpha(z,X)|^p) + \mathbb{E}(|\beta(z,X)|^p) \\
\leqslant\ & H\left(z, \mathbb{E}\left(\sup_{\zeta \leqslant z} |X_\zeta|^p\right)\right),
\end{aligned}$$

(1c) $\forall K>0$ 及初值 ($z\in\partial\mathbb{R}_+^2$ 时的值)$u_0\geqslant 5^{p-1}\mathbb{E}\left(|X_0|^p\right)$, 方程

$$\mathrm{d}u=KH(z,u)\,\mathrm{d}B_z$$

有全局解.

(2) 存在函数 $G(z,u):\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足:

(2a) $G(z,u)$ 对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 关于 z 对 $\mathrm{d}B_z$ 局部可积, 对固定的 $z\in\mathbb{R}_+^2$ 关于 u 为连续增函数, 且 $G(z,0)=0$,

(2b) $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, $X,Y\in\mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}^p(\mathfrak{D})$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\|\sigma(z,X)-\sigma(z,Y)\|^p\right)+\mathbb{E}\left(|b(z,X)-b(z,Y)|^p\right)\\
&+\mathbb{E}\left(|\alpha(z,X)-\alpha(z,Y)|^p\right)+\mathbb{E}\left(|\beta(z,X)-\beta(z,Y)|^p\right)\\
\leqslant\ & G\left(z,\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta-Y_\zeta|^p\right)\right),
\end{aligned}$$

(2c) $\forall K>0$, 若 $\mathbb{R}_+$ 上的非负函数 Z 满足 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$,

$$Z_z\leqslant K\int_{R_z}G(\xi,Z_\xi)\,\mathrm{d}B_\xi,$$

可得 $Z\equiv 0$.

则方程 (7) 的解存在且满足轨道唯一性.

6 由无穷个 Brown 单驱动的随机微分方程

考虑如下双参数非 Markov 型随机微分方程:

$$X_z=x+\int_{R_z}\sigma(\xi,X)\,\mathrm{d}W_\xi+\int_{R_z}b(\xi,X)\,\mathrm{d}\xi,\tag{8}$$

其中 $W=(W^1,W^2,\cdots)$, $\{W^j,j=1,2,\cdots\}$ 为某完备带流的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_z)$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 单.

我们给出了在非 Lipschitz 系数的条件下方程 (8) 存在唯一强解的一个充分条件. 这部分工作取自文章 [50] (已被数学物理学报 (中文版) 录用).

定理 10 设 λ 为双参数非负局部可积函数, ρ_1 和 ρ_2 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数, 满足 $\rho_1(0)=\rho_2(0)=0$ 且 $\exists p\geqslant 2$, 使

$$\int_{0^+}\frac{u^{p-1}}{\rho_1^p(u)+\rho_2^p(u)}\,\mathrm{d}u=+\infty.$$

若 $\|\sigma(z,0)\|$ 和 $|b(z,0)| \in \mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}$, 且 $\forall z \in \mathbb{R}^2_+$, $X, Y \in \mathfrak{W}$, 有

$$\begin{aligned}
\|\sigma(z,X)-\sigma(z,Y)\| &\leqslant \sqrt[p]{\lambda(z)}\rho_1\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta - Y_\zeta|\right), \\
|b(z,X)-b(z,Y)| &\leqslant \sqrt[p]{\lambda(z)}\rho_2\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta - Y_\zeta|\right),
\end{aligned}$$

则方程 (8) 有唯一强解.

关键词: 带跳随机微分方程　倒向随机微分方程　非 Markov 型　非 Lipschitz 系数　唯一强解　逐次逼近

Abstract

In this paper, we mainly study stochastic differential equations in infinite dimensional space. Our paper consists mainly of the following contents:

1 SDEs in Hilbert space

Let K and H be two real separate Hilbert spaces, and $(U,\mathcal{E},n)$ be a σ-finite measurable space. $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ is a complete filtered probability space, W is a K-valued cylindrical Q-Brownian motion, and p is a U-valued stationary Poisson point process with quasi left continuous path, N_p, $\hat{N}_p$ and n is the counting measure, the compensating measure and the characteristic measure of p respectively. $U_0\in\mathcal{E}$ with $n(U-U_0)<+\infty$.

Consider the following non-Markovian stochastic differential equations with jumps in H:

$$
\begin{aligned}
X_t &= X_0+\int_0^t \sigma(s,X)\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t b(s,X)\,\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{U_0} f(s,X,u)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u)\\
&\quad +\int_0^t\int_{U-U_0} f(s,X,u)N_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

In paper [54], we prove the following result:

Theorem 1 Suppose that

(1) there exists a function $H(t,u):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ such that:

(1a) $H(t,u)$ is locally integrable in t for each fixed $u\in\mathbb{R}_+$ and is continuous nondecreasing in u for each fixed $t\in\mathbb{R}_+$,

(1b) $\forall t>0$, $X\in\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}(H))$ such that

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\|\sigma(t,X)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}\right)+\mathbb{E}\left(\|b(t,X)\|^p\right)+\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(t,X,u)\|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(t,X,u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\\
\leqslant\ & H\left(t,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r\|^p\right)\right),
\end{aligned}
$$

(1c) $\forall K>0$ and any initial value $u_0\geqslant 4^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right)$, the differential equation

$$
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=KH(t,u)
$$

has a global solution.

(2) there exists a function $G(t,u):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ such that:

(2a) $G(t,u)$ is locally integrable in t for each fixed $u\in\mathbb{R}_+$ and is continuous nondecreasing in u for each fixed $t\in\mathbb{R}_+$, and $G(t,0)=0$,

(2b) $\forall t>0$, $X,Y\in\mathfrak{L}^p_{\rm loc}(\mathcal{D}(H))$ such that

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\|^p_{\mathcal{L}^0_2}\right)+\mathbb{E}\left(\|b(t,X)-b(t,Y)\|^p\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(t,X,u)-f(t,Y,u)\|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(t,X,u)-f(t,Y,u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\\
\leqslant\ & G\left(t,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r-Y_r\|^p\right)\right),
\end{aligned}$$

(2c) $\forall K>0$, if a nonnegative function Z satisfies that $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$Z_t\leqslant K\int_0^t G(s,Z_s)\,\mathrm{d}s,$$

then $Z\equiv 0$.

then Eq.(1) has a pathwise unique solution.

We should bring the reader's attention to the following fact, the conditions in Theorem 1 is so weak that most of the well known results about non-lipschitz SDE can be as special cases of it. In addition, this kind of equation is an extension of classical stochastic differential equations, and we will give a simple example which includes the Brownian motion on the group of diffeomorphism of the circle (see [2, 1]).

Noticing that the existence of pure jump's integration term in Eq.(1), we could meet the moment estimate problem of this term when we consider the existence of the solution by successive approximations. So we prove the following Burkholder-Davis-Gundy's inequality:

Theorem 2 For $p\geqslant 2$, $f\in\mathcal{F}^2_{\rm loc}(H)$, if $M_t=\int_0^t\int_U f(s,u)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u)$, then there exists a constant $K_{p,t}>0$ such that $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{s\leqslant t}\|M_s\|^p\right)\ \leqslant\ & K_{p,t}\int_0^t\left(\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\right.\\
&\left.+\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

2 BSDEs in Hilbert space

Consider the following semilinear backward stochastic differential equations in H ($Q = I$):

$$X_T = X_t + \int_t^T (\sigma(s, X_s) + Y_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_t^T b(s, X_s, Y_s)\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

In paper [67], We prove the following result:

Theorem 3 Suppose that

(1) there exists a function $H(t,u) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ such that:

(1a) $H(t,u)$ satisfies $\int_0^T H(s,u)\,\mathrm{d}s < +\infty$ for each fixed $u \in \mathbb{R}_+$ and is continuous nondecreasing in u for each fixed $t \in [0,T]$,

(1b) there exists a constant $C > 0$, $\forall t \in [0,T]$, $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, H)$, $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{L}_2)$, such that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\sigma(t,X)\|_{\mathcal{L}_2}^2 &\leqslant H\left(t, \mathbb{E}\|X\|^2\right), \\ \mathbb{E}\|b(t,X,Y)\|^2 &\leqslant H\left(t, \mathbb{E}\|X\|^2\right) + C\mathbb{E}\|Y\|_{\mathcal{L}_2}^2,\end{aligned}$$

(1c) $\forall K > 0$ and any final value $u_T \geqslant 0$, the differential equation

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -KH(t,u)$$

has a solution in $[0,T]$.

(2) there exists a function $G(t,u) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ such that:

(2a) $G(t,u)$ satisfies $\int_0^T G(s,u)\,\mathrm{d}s < +\infty$ for each fixed $u \in \mathbb{R}_+$ and is continuous nondecreasing in u for each fixed $t \in [0,T]$, and $G(t,0) = 0$,

(2b) $\forall t \in [0,T]$, $X, X' \in \mathcal{L}^2(\Omega, H)$, $Y, Y' \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{L}_2)$ such that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\sigma(t,X) - \sigma(t,X')\|_{\mathcal{L}_2}^2 &\leqslant G\left(t, \mathbb{E}\|X - X'\|^2\right), \\ \mathbb{E}\|b(t,X,Y) - b(t,X',Y')\|^2 &\leqslant G\left(t, \mathbb{E}\|X - X'\|^2\right) + C\mathbb{E}\|Y - Y'\|_{\mathcal{L}_2}^2,\end{aligned}$$

(2c) $\forall K > 0$, if a nonnegative function Z on $[0,T]$ satisfies that $\forall t \in [0,T]$,

$$Z_t \leqslant K \int_t^T G(s, Z_s)\,\mathrm{d}s,$$

then $Z \equiv 0$.

then Eq.(2) has a unique solution.

3 SDEs in Banach space

Let E be a M-type 2 real separable Banach space, F be a real separable Banach space, and W be a F-valued Wiener process.

Consider the following non-Markovian stochastic differential equations in E:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X)\,\mathrm{d}s. \tag{3}$$

Similar to Theorem 1, we give a result about the existence and uniqueness of the solution to Eq. (3), which will be published in Mathematica Applicata(China) (see [48]).

4 SDEs driven by countably many Brownian motions

This part of work comes from paper [49], which has been published in J.Funct.Anal.. In that paper, we only consider one dimensional time homogeneous Markovian stochastic differential equations:

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s, \tag{4}$$

Here we extend to study high dimensional non-Markovian type equations.

Consider the following non-Markovian stochastic differential equations with jumps in $\mathbb{R}^m$:

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X)\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

where $W = (W^1, W^2, \cdots)$, $\{W^j, j = 1, 2, \cdots\}$ is an infinite sequence of independent Brownian motions on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$, which is a complete filtered probability space.

This kind of equation is actually the special case of equation which driven by cylindrical I-Brownian motion in Hilbert space l^2. Similar to the finite dimensional case, we define the conceptions of the weak solution, the strong solution and the unique strong solution, and then develop the results which parallel classical theories, and give some conditions on existence of the unique strong solution to the equation with non-Lipschitz coefficients.

Theorem 4 Eq.(5) has a unique strong solution if and only if there is a solution to (5) and the pathwise uniqueness holds.

Theorem 5 Let λ be a non-negative, locally integrable function, ρ_1 and ρ_2 be concave nondecreasing functions on $\mathbb{R}_+$ such that $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0$ and $\exists p \geqslant 2$, such that

$$\int_{0+} \frac{u^{p-1}}{\rho_1^p(u) + \rho_2^p(u)}\,\mathrm{d}u = +\infty.$$

If $\|\sigma(t,0)\|$ and $|b(t,0)| \in \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, and $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $X, Y \in \mathcal{W}^m$, such that

$$\begin{aligned}\|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\| &\leqslant \sqrt[p]{\lambda(t)}\rho_1\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r-Y_r|\right),\\ |b(t,X)-b(t,Y)| &\leqslant \sqrt[p]{\lambda(t)}\rho_2\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r-Y_r|\right),\end{aligned}$$

then Eq.(5) has a unique strong solution.

Concerning the weak solution to Eq.(5), we have proved the following infinite dimensional stochastic integral representation theorem of continuous local martingale, then we can conclude that the existence of the solution to Eq.(5) is equivalent to the existence of the solution to a martingale problem. This part of work will be published in J.Huazhong Univ.of Sci.& Tech. (Nature Science Edition) (see [65]).

Theorem 6 Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$ be a complete filtered probability space, $M \in \mathcal{M}_{c,\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$, and $M_0 = 0$ a.s.. If $\exists \sigma \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m \otimes l^2)$ such that

$$[M^i, M^l]_t = \int_0^t (a^i_l)_s \,\mathrm{d}s, \qquad (i, l = 1, 2, \cdots, m),$$

where $a = \sigma\sigma^*$, then there exists a extension $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ of $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$, and an infinite sequence of independent $\tilde{\mathcal{F}}_t$-Brownian motions $\tilde{W} = (\tilde{W}^1, \tilde{W}^2, \cdots)$ on it such that

$$M_t = \int_0^t \sigma_s \,\mathrm{d}\tilde{W}_s, \qquad \text{a.s..}$$

Theorem 7 Suppose that σ and b in Eq.(4) are bounded, and the following conditions are satisfied:

(1) there exists a continuous non-decreasing function ρ on $\mathbb{R}_+$ such that $\rho(0) = 0$,

$$\int_{0^+} \rho^{-2}(u)\,\mathrm{d}u = +\infty,$$

and $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leqslant \rho(|x - y|),$$

(2) there exists a concave non-decreasing function γ on $\mathbb{R}_+$ such that $\gamma(0) = 0$,

$$\int_{0^+} \gamma^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = +\infty,$$

and $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|b(x) - b(y)| \leqslant \gamma(|x - y|),$$

then Eq.(4) has a unique strong solution.

Subsequently, we give some properties of the solution to Eq.(4), such as the strongly Markovian property, the non-contact property and a strong comparison theorem.

Furthermore, consider the following semilinear backward stochastic differential equations in $\mathbb{R}^m$:

$$X_T = X_t + \int_t^T (\sigma(s, X_s) + Y_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_t^T b(s, X_s, Y_s)\,\mathrm{d}s, \tag{6}$$

where $W = (W^1, W^2, \cdots)$, $\{W^j, j = 1, 2, \cdots\}$ is an infinite sequence of independent Brownian motions on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, which is a complete probability space, $\mathcal{F}_t$ is the complete natural σ-algebras filtration generated by W, and $T > 0$.

We have the following theorem:

Theorem 8 Let λ be a non-negative function such that $\int_0^T \lambda(s)\,\mathrm{d}s < +\infty$, ρ_1 and ρ_2 be concave nondecreasing functions on $\mathbb{R}_+$ such that $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0$ such that

$$\int_{0+} \frac{u}{\rho_1^2(u) + \rho_2^2(u)}\,\mathrm{d}u = +\infty.$$

If $\sigma(t, \omega, 0) \in \mathcal{L}^2([0,T], \mathbb{R}^m \otimes l^2)$, $b(t, \omega, 0, 0) \in \mathcal{L}^2([0,T], \mathbb{R}^m)$, and $\forall t \in [0,T]$, $X, X' \in \mathbb{R}^m$, $Y, Y' \in \mathbb{R}^m \otimes l^2$, such that

$$\begin{aligned} \|\sigma(t, X) - \sigma(t, X')\| &\leqslant \sqrt{\lambda(t)}\rho_1(|X - X'|) \quad \text{a.s.}, \\ |b(t, X, Y) - b(t, X', Y')| &\leqslant \sqrt{\lambda(t)}\rho_2(|X - X'|) + C\|Y - Y'\| \quad \text{a.s.}, \end{aligned}$$

then Eq.(6) has a unique solution.

5 Two parameter SDEs with jumps

This part of work will be published in Mathematica Applicata(China) (see [64]), where we only consider two parameter time homogeneous Markovian stochastic differential equations driven by a Brown sheet, here we extend to study non-Markovian type equations driven by an infinite sequence of independent Brownian sheets.

Let $W = (W^1, W^2, \cdots)$, $\{W^j, j = 1, 2, \cdots\}$ is an infinite sequence of independent Brownian sheets on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$, which is a complete filtered probability space. Υ is a Poisson sheet, Λ is the intensity measure of Us, and $N = \Upsilon - \Lambda$.

Consider the following two parameter non-Markovian stochastic differential equations with jumps:

$$X_z = X_0 + \int_{R_z} \sigma(\xi, X)\,\mathrm{d}W_\xi + \int_{R_z} b(\xi, X)\,\mathrm{d}\xi$$

$$+\int_{R_z} \alpha(\xi, X)\,\mathrm{d}\Lambda_\xi + \int_{R_z} \beta(\xi, X)\,\mathrm{d}N_\xi. \tag{7}$$

By the method similar to Theorem 1 we can prove the following result:

Theorem 9 Suppose that

(1) there exists a function $H(z,u) : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ such that:

(1a) $H(z,u)$ is locally integrable in z with respect to $\mathrm{d}B_z$ for each fixed $u \in \mathbb{R}_+$ and is continuous nondecreasing in u for each fixed $z \in \mathbb{R}_+^2$, where $B_z = z + \Lambda_z$,

(1b) $\forall z \in \mathbb{R}_+^2$, $X \in \mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}^p(\mathfrak{D})$ such that

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\|\sigma(z,X)\|^p\right) + \mathbb{E}\left(|b(z,X)|^p\right) + \mathbb{E}(|\alpha(z,X)|^p) + \mathbb{E}(|\beta(z,X)|^p) \\ \leqslant\ & H\left(z, \mathbb{E}\left(\sup_{\zeta \leqslant z} |X_\zeta|^p\right)\right), \end{aligned}$$

(1c) $\forall K > 0$ and any initial value (i.e. on axes) $u_0 \geqslant 5^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right)$, the differential equation

$$\mathrm{d}u = KH(z,u)\,\mathrm{d}B_z$$

has a global solution.

(2) there exists a function $G(z,u) : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ such that:

(2a) $G(z,u)$ is locally integrable in z with respect to $\mathrm{d}B_z$ for each fixed $u \in \mathbb{R}_+$ and is continuous nondecreasing in u for each fixed $z \in \mathbb{R}_+^2$, and $G(z,0) = 0$,

(2b) $\forall z \in \mathbb{R}_+^2$, $X, Y \in \mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}^p(\mathfrak{D})$ such that

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\|\sigma(z,X) - \sigma(z,Y)\|^p\right) + \mathbb{E}\left(|b(z,X) - b(z,Y)|^p\right) \\ & + \mathbb{E}\left(|\alpha(z,X) - \alpha(z,Y)|^p\right) + \mathbb{E}\left(|\beta(z,X) - \beta(z,Y)|^p\right) \\ \leqslant\ & G\left(z, \mathbb{E}\left(\sup_{\zeta \leqslant z} |X_\zeta - Y_\zeta|^p\right)\right), \end{aligned}$$

(2c) $\forall K > 0$, if a nonnegative function Z satisfies that $\forall z \in \mathbb{R}_+^2$,

$$Z_z \leqslant K \int_{R_z} G(\xi, Z_\xi)\,\mathrm{d}B_\xi,$$

then $Z \equiv 0$.

then Eq.(7) has a pathwise unique solution.

6 SDEs driven by countably many Brownian sheets

Consider the following two parameter non-Markovian stochastic differential equations:

$$X_z = x + \int_{R_z} \sigma(\xi, X)\,\mathrm{d}W_\xi + \int_{R_z} b(\xi, X)\,\mathrm{d}\xi, \tag{8}$$

where $W = (W^1, W^2, \cdots)$, $\{W^j, j = 1, 2, \cdots\}$ is an infinite sequence of independent Brownian sheets on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$, which is a complete filtered probability space.

We give a condition on existence of the unique strong solution to the equation with non-Lipschitz coefficients. This part of work will be published in Acta Math.Sci.(A) (see [50]).

Theorem 10 Let λ be a two parameter non-negative, locally integrable function, ρ_1 and ρ_2 be concave nondecreasing functions on $\mathbb{R}_+$ such that $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0$ and $\exists p \geqslant 2$, such that

$$\int_{0+} \frac{u^{p-1}}{\rho_1^p(u) + \rho_2^p(u)}\,\mathrm{d}u = +\infty.$$

If $\|\sigma(z, 0)\|$ and $|b(z, 0)| \in \mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}$, and $\forall z \in \mathbb{R}^2_+$, $X, Y \in \mathfrak{W}$, such that

$$\begin{aligned} \|\sigma(z, X) - \sigma(z, Y)\| &\leqslant \sqrt[p]{\lambda(z)}\rho_1\left(\sup_{\zeta \leqslant z} |X_\zeta - Y_\zeta|\right), \\ |b(z, X) - b(z, Y)| &\leqslant \sqrt[p]{\lambda(z)}\rho_2\left(\sup_{\zeta \leqslant z} |X_\zeta - Y_\zeta|\right), \end{aligned}$$

then Eq.(8) has a unique strong solution.

Keywords: SDE with jumps BSDE Non-Markovian Non-Lipschitz coefficients Unique strong solution Successive approximation

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到，本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期：　　年　月　日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权华中科技大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本论文属于　保密□ ，在_____年解密后适用本授权书。

不保密□。

（请在以上方框内打“√”）

学位论文作者签名：　　　　指导教师签名：

日期：　年　月　日　　　　日期：　年　月　日

引言

近年来, 随机分析, 随机微分方程 (SDE) 有了迅速的发展, 并广泛应用于系统科学, 工程控制，物理学，金融经济等领域. 随机微分方程理论经过长期的发展，已取得了丰富的成果. 但由于理论和方法的限制，大多数工作只停留在有限维的情形，而且系数一般要求为 Lipschitz 或局部 Lipschitz 且线性增长，然而在实际应用中，我们有时需要研究无穷维空间上的随机微分方程，或者，考虑非 Lipschitz 系数 (参看 Malliavin [1] 和 Airault-Ren [2]) 以及更弱的条件下方程解的一些情况.

考虑如下的 $\mathbb{R}^m$ 值非 Markov 型随机微分方程:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X)\,\mathrm{d}s, \tag{1}$$

及其逐次逼近

$$\begin{cases} X_t^0 &= X_0, \\ X_t^n &= X_0 + \int_0^t \sigma(s, X^{n-1})\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X^{n-1})\,\mathrm{d}s, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

若 σ 和 b 满足 Lipschitz 条件，则方程 (1) 有唯一强解，且满足 $\forall p \geqslant 2$, $\forall T \in \mathbb{R}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup\limits_{t\leqslant T} |X_t^n - X_t|^p\right) = 0$.

关于方程 (1) 的研究非常之多，有许多文献研究了方程 (1) 在系数满足非 Lipschitz 条件下解的存在唯一性. 读者可参看 Yamada-Watanabe [3, 4] 和 Taniguchi [5] 及其所附参考文献. Yamada-Watanabe [4] 得到了一个较好的关于系数满足 Hölder 条件的随机微分方程解的唯一性结果. Yamada [3] 给出了一个比 Itô 的结果更好的条件来保证 (2) 式中的逐次逼近收敛. 在此基础上， Yamada-Ogura [6] 给出了该方程的非接触性和强比较定理.

值得注意的是，在 [5] 中， Taniguchi 用逐次逼近的方法证明了在一个相当弱的系数满足非 Lipschitz 条件的假设下， Markov 型随机微分方程的解的存在唯一性. 他的结果包括了多数已知的结果 (参看 [3, 4]).

受文献 [5] 的启发，我们研究了 Hilbert 空间上的由柱 Q-Brown 运动和平稳 Poisson 点过程驱动的非 Markov 型随机微分方程以及 Banach 空间上的非 Markov 型随机微分方程，并将其推广到由无穷个 Brown 单和 Poisson 单驱动的非 Markov 型双参数随机微分方程的情形. 关于 Hilbert 空间或 Banach 空间上的随机积分和随机微分方程，读者可参看 Da Prato-Zabczyk [7], Knoche-Frieler [8], Neidhardt [9] 和 Brzezniak-Carroll [10]).

倒向随机微分方程的理论研究的历史虽短，但进展却很迅速，除了其理论本身所具有的有趣数学性质之外，它在随机控制，金融数学中都有着重要的运用．它的一般非线性情况的基本框架由 Pardoux-Peng [11] 给出，Mao [12] 在类似于 Yamada-Watanabe [4] 的条件下给出了具有非 Lipschitz 系数的条件下半线性方程解的存在唯一性．随着 Hilbert 空间中最优控制理论的讨论，要求我们考虑无穷维空间中倒向随机微分方程解的存在唯一性问题，这方面的研究工作还较少． Hu-Peng [13] 用随机 Fubini 定理 (命题 1.20) 和拓广的鞅表示定理讨论了一般半线性情况下在 Lipschitz 系数的条件下倒向随机发展方程的温和解的存在唯一性， Zhou-Cao [14] 仿照 Mao 在有限维情形提出的条件得到了其在非 Lipschitz 系数的条件下温和解的存在唯一性定理，我们也用逐次逼近的方法研究 Hilbert 空间上的由柱 I-Brown 运动驱动的半线性倒向随机微分方程解的存在性和唯一性，其结果为大多数已知结果的推广．事实上，用相同的程序，我们的结果还可以容易地应用于由柱 I-Brown 运动驱动的半线性倒向随机发展方程的温和解上去.

在第一章中，我们简单地介绍了 Hilbert 空间上的柱 Q-Brown 运动， Poisson 点过程, 以及关于它们的随机积分的一些性质, 包括 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, 一般带跳随机积分的 Itô 公式等. 为了处理带跳随机积分项的矩估计问题, 我们用 Khintchine 不等式以及 Gronwall-Bellman 引理等已知结果对带跳随机积分证明了类似于 Burkholder-Davis-Gundy 不等式的一个很有用的结果. 这样, 我们就可以在比 Taniguchi 的条件更弱的情况下, 用逐次逼近的方法证明 Hilbert 空间上非 Markov 型带跳随机微分方程的解的存在唯一性. 此外, 我们把 Airault-Ren [2] 中的随机微分方程推广到非 Markov 型作为例子给出．对于 Hilbert 空间上的半线性倒向随机微分方程和 Banach 空间上的非 Markov 型随机微分方程, 我们也得到了类似的结果. 这样我们的文章包含了 Taniguchi 和其他学者的几乎所有的结果.

Malliavin [1] 和 Airault-Ren [2] 研究了关于环的同胚群上的 Brown 运动. 为此, 我们提出了更一般的由无穷个 Brown 运动驱动的随机微分方程．此类方程实际上是 Hilbert 空间 l^2 上的由柱 I-Brown 运动驱动的随机微分方程的特殊情形．文献 [15] 也曾讨论过关于无穷个独立的实值 Brown 运动的随机积分的定义和性质，给出了广义 Girsanov 定理和无穷维可料表示性定理.

在第二章中, 我们系统地研究了此类随机积分. 首先, 我们仿照有限维的情形定义了弱解，强解，唯一强解等概念，得到了与经典的随机微分方程的结果平行的一些结论，例如方程有唯一强解等价于它存在一个弱解且其解具有轨道唯一性．然后我们证明了满足一定条件的连续局部鞅可以表示成关于无穷个独立的实值 Brown 运动的随机积分，由此得到随机微分方程的解的存在性等价于某个鞅问题的解的存在性，并给出解存在的充分条件．在逐次逼近和 Yamada-Watanabe [4] 的基础上，我们还给出了在非 Lipschitz 系数的条件下该类方程存在唯一强解的几个充分条件以及由无穷个 Brown 运动驱动的半线性倒向随机微分方程存在唯一解的一个充分条件．事实上，用相同的程序，我们的结果

还可以容易地应用于由连续局部鞅和连续增过程驱动的随机微分方程上去．最后，我们进一步给出了时齐方程的强 Markov 性，非接触性和强比较定理．此后，文献 [16] 获得了该方程关于初值的同胚流的性质．

经典的双参数随机微分方程首先由 Cairoli [17] 和 Yeh [18, 19, 20] 等学者进行了系统的研究．上述文献中系数通常也要求 Lipschitz 或局部 Lipschitz 且线性增长，其中 Yeh [18] 得到了强解的存在唯一性，而 [19, 20] 中发展了 Brown 单型随机微分方程的一系列与单参数平行的结果．例如系数只满足连续性时弱解的存在性，方程存在唯一强解等价于方程存在一个弱解且其解具有轨道唯一性．此后，许多学者致力于放松 Lipschitz 假设来得到解的存在唯一性．在非 Lipschitz 系数的情况下， Nie [21], Liang [22] 首先得到由 Brown 单甚至一般连续鞅和连续增过程驱动的随机微分方程的解的唯一性． Chen [23] 和 Liu [24] 也分别研究了 Poisson 单型和一般混合型随机微分方程的解的存在唯一性．

在第三章中，我们沿着上面的思路，考虑由无穷个 Brown 单和 Poisson 单驱动的非 Markov 型双参数随机微分方程，用类似于第一章中的方法证明了该类方程的解的存在唯一性．这样我们的结果推广了刘继成和其他学者的关于双参数随机微分方程的几乎所有的结果，他们的结果一般都可作为其特例给出．特别地，我们仿照有限维的情形研究了非 Lipschitz 系数的条件下由无穷个 Brown 单驱动的随机微分方程，得到了类似于第二章中的方程存在唯一强解的一个充分条件．事实上，用相同的程序，该结果可以容易地应用于由连续强鞅和连续增过程驱动的双参数随机微分方程上去．

1　无穷维空间上的随机微分方程

在本文中，除非特别说明， C 表示一正常数，其值可以改变.

1.1　Hilbert 空间上的随机分析简介

以下内容可参看 Da Prato-Zabczyk [7] 和 Knoche-Frieler [8].

设 K 和 H 为两个实可分 Hilbert 空间. 如不特别指明哪个空间，则不同空间中的内积和范数统一用 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 表示. 我们用 $\mathcal{L}(K,H)$, $\mathcal{L}_2(K,H)$ 及 $\mathcal{L}_1(K,H)$ 分别表示从 K 到 H 的有界线性算子全体， Hilbert-Schmidt 算子全体及迹算子全体，并用 $\mathcal{L}(K)$, $\mathcal{L}_2(K)$ 及 $\mathcal{L}_1(K)$ 分别简记 $\mathcal{L}(K,K)$, $\mathcal{L}_2(K,K)$ 及 $\mathcal{L}_1(K,K)$, I 表示单位算子. L^* 表示 L 的对偶算子.

定义 1.1 设 $L \in \mathcal{L}(K,H)$, L 的值域为 $\mathrm{R}(L) = \{Lx : x \in K\} = L(K)$, L 的核为 $\mathrm{N}(L) = \{x \in K : Lx = 0\}$. 我们称 $(L|_{\mathrm{N}(L)^\perp})^{-1} : \mathrm{R}(L) \mapsto \mathrm{N}(L)^\perp$ 为 L 的伪逆算子，仍记为 L^{-1}.

显然， $LL^{-1} = I_{\mathrm{R}(L)}$, 且 $\forall x \in \mathrm{N}(L)^\perp$, 有 $L^{-1}Lx = x$, 但一般并没有 $L^{-1}L = I_K$.

命题 1.2 设 $L \in \mathcal{L}(K)$,

(1)$\forall x, y \in \mathrm{R}(L)$, 定义 $(x,y)_{\mathrm{R}(L)} = (L^{-1}x, L^{-1}y)_K$, 则 $\mathrm{R}(L)$ 依此内积为一 Hilbert 空间.

(2) 若 $\{\delta_i, i \in \mathbb{N}\}$ 为 $\mathrm{N}(L)^\perp$ 上的一列标准正交基，则 $L\delta_i$ 为 $\mathrm{R}(L)$ 上的一列标准正交基.

命题 1.3 若 $L \in \mathcal{L}(K,H)$, 则 $Q = LL^* \in \mathcal{L}(H)$, $\mathrm{R}(Q^{\frac{1}{2}}) = \mathrm{R}(L)$, 且 $\forall h \in \mathrm{R}(L)$, 有 $\|Q^{-\frac{1}{2}}h\|_H = \|L^{-1}h\|_K$.

定义 1.4 设 μ 为 K 上的 Borel 概率测度，若 $\forall x \in K$, $(x,\cdot)$ 为 $(K,\mathcal{B}(K),\mu)$ 上的 Gauss 随机变量，则称 μ 为 K 上的 Gauss 测度，称 $(K,\mathcal{B}(K),\mu)$ 为 Gauss 测度空间.

定理 1.5 K 上的 Borel 概率测度 μ 为 K 上的 Gauss 测度等价于 $\exists m \in K$, 及非负自共轭算子 $Q \in \mathcal{L}_1(K)$, 使 μ 的特征函数满足

$$\hat{\mu}(x) = \int_K \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,z)}\mu(\,\mathrm{d}z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m,x) - \frac{1}{2}(Qx,x)}, \tag{1.1}$$

其中 m 称为 μ 的期望， Q 称为 μ 的协方差算子. 此时，我们记 μ 为 $\mathcal{N}(m,Q)$.

若 $\mu=\mathcal{N}(m,Q)$, 易证 $\forall x,y\in K$ 有：

$$\begin{aligned}\int_K (z,x)\mu(\,\mathrm{d}z) &= (m,x),\\ \int_K (z-m,x)(z-m,y)\mu(\,\mathrm{d}z) &= (Qx,y),\\ \int_K \|z-m\|^2\mu(\,\mathrm{d}z) &= \mathrm{Tr}(Q)=\sum_{i=1}^{\infty}(Q\delta_i,\delta_i),\end{aligned}$$

其中 $\{\delta_i, i\in\mathbb{N}\}$ 为 K 上的一列标准正交基.

定义 1.6 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 K 值随机变量 X, 若 $\mathbb{P}\circ X^{-1}=\mathcal{N}(m,Q)$, 即 $\forall x\in K$, (X,x) 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 Gauss 随机变量，则称 X 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 K 值 Gauss 随机变量，且称 X 服从分布 $\mathcal{N}(m,Q)$. 记 $\mathbb{E}(X)=m$, $\mathrm{cov}(X)=\mathbb{E}[(X-m)\otimes(X-m)]=Q$.

显然，若 X 服从分布 $\mathcal{N}(m,Q)$, 则 $\forall x,y\in K$ 有：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X,x)] &= (m,x),\\ \mathbb{E}[(X-m,x)(X-m,y)] &= (Qx,y),\\ \mathbb{E}(\|X-m\|^2) &= \mathrm{Tr}(Q).\end{aligned}$$

对上述非负自共轭算子 $Q\in\mathcal{L}_1(K)$, 由紧自共轭算子的谱分解定理，存在 K 上的一列标准正交基 $\{\delta_i, i\in\mathbb{N}\}$, 使得

$$Q\delta_i=\lambda_i\delta_i,\qquad \lambda_i\geqslant 0, i\in\mathbb{N}, \tag{1.2}$$

其中， λ_i 称为 Q 的特征值， δ_i 称为 Q 的特征向量 (若 Q 的特征向量 $\{\delta_i, i\in\mathbb{N}\}$ 不完备，我们可将其扩充为 K 上的标准正交基，我们仍称扩充的元素为 Q 的特征向量，且它们对应的特征值必为 0).

定理 1.7 (Gauss 随机变量的表示定理) X 服从分布 $\mathcal{N}(m,Q)$ 等价于存在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的无穷个相互独立的实值标准 Gauss 随机变量 $\{\xi^i, i=1,2,\cdots\}$, 使

$$X=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\xi^i\delta_i+m. \tag{1.3}$$

定义 1.8 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 K 值随机过程 X, 若 $\forall t_1<t_2<\cdots,t_n$, $(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})$ 为 K^n 值 Gauss 随机变量，则称 X 为 K 值 Gauss 过程.

定义 1.9 设 M 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 上的 H 值随机过程，满足 $\forall s<t$,

$$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)=M_s, \tag{1.4}$$

则称 M 为 H 值鞅. 若存在 $\mathcal{F}_t$- 停时列 $\tau_n\uparrow\infty$, 使 M^{τ_n} 为 H 值鞅，则称 M 为 H 值局部鞅.

显然，若 M 为 H 值鞅，则 $\|M\|$ 为实值下鞅，且 $\forall h \in H$, (M,h) 为实值鞅.

本文中我们会用到下面一些记号：

$\mathcal{V}(\mathbb{R}^m)$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 值有限变差过程,

$\mathcal{V}^+(\mathbb{R}^m)$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 值增过程,

$\mathcal{V}_c(\mathbb{R}^m) = \{A : A \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^m), A\text{连续}\}$,

$\mathcal{V}_c^+(\mathbb{R}^m) = \{A : A \in \mathcal{V}^+(\mathbb{R}^m), A\text{连续}\}$,

$\mathcal{M}^p(H)$ 表示 H 值右连左极 p 次可积鞅全体,

$\mathcal{M}^p_{\text{loc}}(H)$ 表示 H 值右连左极局部 p 次可积鞅全体,

$\mathcal{M}^p_c(H) = \{M : M \in \mathcal{M}^p(H), M\text{连续}\}$,

$\mathcal{M}_{c,\text{loc}}(H) = \{M : M \in \mathcal{M}^1_{\text{loc}}(H), M\text{连续}\}$,

$\mathcal{L}^p(H) = \{b : \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto H |\ b \text{ 为可测适应 } H \text{ 值过程}, \forall t, \int_0^t \mathbb{E}\|b_s\|^p \, \mathrm{d}s < +\infty\}$,

$\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(H) = \{b : \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto H |\ b \text{ 为可测适应 } H \text{ 值过程}, \forall t, \int_0^t \|b_s\|^p \, \mathrm{d}s < +\infty \text{ a.s.}\}$,

(若 $H = \mathbb{R}$, 则我们均可省略 $\mathbb{R}$).

若 $M \in \mathcal{M}^2(H)$, 我们称 $\langle M \rangle_t = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle (M, e_i) \rangle_t$ 为 M 的可料平方变差过程，其中 $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ 为 H 上的一列标准正交基.

若存在 $\langle\langle M \rangle\rangle_t \in \mathcal{L}_1(H)$, 使得 $M_t \otimes M_t - \langle\langle M \rangle\rangle_t \in \mathcal{M}^1(\mathcal{L}(H))$, 我们称 $\langle\langle M \rangle\rangle_t$ 为 M 的可料平方变差算子.

考虑完备带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$, 固定一非负自共轭算子 $Q \in \mathcal{L}(K)$.

定义 1.10 若 $Q \in \mathcal{L}_1(K)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的 K 值连续随机过程 W 满足：

(1) $W_0 = 0$ a.s.,

(2) $W_t - W_s$ 服从 $\mathcal{N}(0, (t-s)Q)$,

(3) W 为独立增量过程,

则称 W 为 K 值 Q-Brown 运动.

显然，若 W 为 K 值 Q-Brown 运动，则它为 K 值 Gauss 过程，且为 K 值鞅，其可料平方变差算子为 $\langle\langle W \rangle\rangle_t = tQ$.

由 Gauss 随机变量的表示定理 (定理 1.7) 易得：

定理 1.11 若 $Q \in \mathcal{L}_1(K)$, 其谱分解如 (1.2) 式. 则 W 为 K 值 Q-Brown 运动等价于存在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 运动 $\{W^i, i = 1, 2, \cdots\}$, 使

$$W_t = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} W_t^i \delta_i. \tag{1.5}$$

显然，若 W 为 K 值 Q-Brown 运动，则 $\forall x \in K$, $\dfrac{(W, x)}{(Qx, x)^{\frac{1}{2}}}$ 为实值 Brown 运动.

对一般的 $Q \in \mathcal{L}(K)$(不一定有 $Q \in \mathcal{L}_1(K)$), 由命题 1.3 和定理 1.11, 我们给出如下 K 值柱 Q-Brown 运动的定义：

定义 1.12 若 $Q \in \mathcal{L}(K)$, 设 K_1 为另一实可分 Hilbert 空间， $K_0 = \mathrm{R}(Q^{\frac{1}{2}})$(见命题 1.2(1)), $J \in \mathcal{L}_2(K_0, K_1)$, 则存在非负自共轭算子 $Q_1 = JJ^* \in \mathcal{L}_1(K_1)$, 使得 $\mathrm{R}(Q_1^{\frac{1}{2}}) = \mathrm{R}(J)$, $\|x\|_{K_0} = \|Q_1^{-\frac{1}{2}} J(x)\|_{K_1} = \|J(x)\|_{\mathrm{R}(J)}$, 且

$$W_t = \sum_{i=1}^{\infty} W_t^i J(f_i) \tag{1.6}$$

为 K_1 值 Q_1-Brown 运动,此时我们称 W 为 K 值柱 Q-Brown 运动. 其中 $\{W^i, i = 1, 2, \cdots\}$ 为无穷个相互独立的实值 Brown 运动， $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ 为 Hilbert 空间 K_0 上的一列标准正交基.

注 1.13 (1) 若 $Q \in \mathcal{L}_1(K)$, 令 $K_1 = K$, $J = I$, 则 $Q_1 = Q$, 此时柱 Q-Brown 运动即为 Q-Brown 运动.

(2) 特别地，若 $Q = I$(例如第2章中 l^2 值 W), 则 $K_0 = K$, 令 $K_1 = K$,

$$\begin{aligned} J : K &\mapsto K \\ \delta_i &\mapsto \lambda_i \delta_i, \end{aligned}$$

其中 $\lambda_k > 0$, 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < +\infty$, $\{\delta_i, i \in \mathbb{N}\}$ 为 K 上的一列标准正交基.

设 $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_2(K_0, H)$, 其范数为 $\|L\|_{\mathcal{L}_2^0} = \|LQ^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}_2(K,H)}$. 记

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\mathcal{L}_2^0) &= \left\{ \sigma : \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto \mathcal{L}_2^0 \middle| \sigma \in \mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathcal{L}_2^0), \forall t, \int_0^t \mathbb{E}\|\sigma_s\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 \,\mathrm{d}s < +\infty \right\}, \\ \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}^2(\mathcal{L}_2^0) &= \left\{ \sigma : \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto \mathcal{L}_2^0 \middle| \sigma \in \mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathcal{L}_2^0), \forall t, \int_0^t \|\sigma_s\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 \,\mathrm{d}s < +\infty \text{ a.s.} \right\}. \end{aligned}$$

注 1.14 若 $Q = I$, 则 $\mathcal{L}^2(\mathcal{L}_2^0)$ 与 $\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}^2(\mathcal{L}_2^0)$ 的定义中可只要求 σ 为可测适应 $\mathcal{L}_2^0$ 值过程.

对 K 值柱 Q-Brown 运动 W, 下面我们给出关于它的随机积分的一些性质：

命题 1.15 (1) 若 $\sigma\in\mathcal{L}^2(\mathcal{L}_2^0)$, 则 $M_t=\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}W_s\in\mathcal{M}_c^2(H)$, 且满足

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|M_t\|^2) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t\|\sigma_s\|^2_{\mathcal{L}_2^0}\,\mathrm{d}s\right), \qquad \forall t\in\mathbb{R}_+, &(1.7)\\ \langle M\rangle_t &= \int_0^t\|\sigma_s\|^2_{\mathcal{L}_2^0}\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t\in\mathbb{R}_+. &(1.8)\\ \langle\langle M\rangle\rangle_t &= \int_0^t(\sigma_sQ^{\frac12})(\sigma_sQ^{\frac12})^*\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t\in\mathbb{R}_+. &(1.9)\end{aligned}$$

(2) 若 $\sigma\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{L}_2^0)$, 则 $M_t=\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}W_s\in\mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}(H)$.

命题 1.16 若 $\sigma\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{L}_2^0)$, $\tilde H$ 为另一实可分 Hilbert 空间, 令 $\tilde{\mathcal{L}}_2^0=\mathcal{L}_2(K_0,\tilde H)$, $L\in\mathcal{L}(H,\tilde H)$, 则 $L\sigma\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\tilde{\mathcal{L}}_2^0)$, 且

$$L\left(\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}W_s\right)=\int_0^t(L\sigma)_s\,\mathrm{d}W_s. \tag{1.10}$$

命题 1.17 若 $\sigma\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{L}_2^0)$, $M_t=\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}W_s$, 则 $\forall a>0$, $c>0$, 有

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leqslant t}\|M_s\|\geqslant c\right)\leqslant\frac{a}{c^2}+\mathbb{P}(\langle M\rangle_t\geqslant a). \tag{1.11}$$

命题 1.18 (Itô 公式) 设

$$X_t=X_0+\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t b_s\,\mathrm{d}s, \tag{1.12}$$

其中

(1) $X_0\in\mathcal{F}_0/\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

(2) $\sigma\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{L}_2^0)$,

(3) $b\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(H)$,

若 $F\in\mathcal{C}_u^{1,2}([0,T]\times H,\mathbb{R})$, 即在 $[0,T]\times H$ 的有界子集上关于第一个变元的一阶 Fréchet 导数 F_t' 和关于第二个变元的一阶及二阶 Fréchet 导数 F_x', F_{xx}'' 均为一致连续, 则 $F(t,X_t)$ 为半鞅, 且满足 $\forall t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}F(t,X_t) &= F(0,X_0)+\int_0^t(F_x'(s,X_s),\sigma_s)\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t\Big(F_t'(s,X_s)+(F_x'(s,X_s),b_s)\\ &\quad+\frac12\mathrm{Tr}(F_{xx}''(s,X_s)(\sigma_sQ^{\frac12})(\sigma_sQ^{\frac12})^*)\Big)\,\mathrm{d}s, \quad a.s.. &(1.13)\end{aligned}$$

命题 1.19 (Burkholder-Davis-Gundy 不等式) 若 $p\geqslant 2$, $\sigma\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{L}_2^0)$, 则 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leqslant t}\Big\|\int_0^s\sigma_u\,\mathrm{d}W_u\Big\|^p\right)\leqslant C_p\mathbb{E}\left(\int_0^t\|\sigma_s\|^2_{\mathcal{L}_2^0}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac p2}, \tag{1.14}$$

其中 $C_p=\left(\frac p2(p-1)\right)^{\frac p2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p^2}{2}}$.

命题 1.20 (随机 Fubini 定理) 设 (E,ε,ν) 为有限测度空间， $\sigma:[0,T]\times\Omega\times E\mapsto\mathcal{L}_2^0$ 为 $(\mathcal{P}\cap[[0,T]])\times\varepsilon/\mathcal{B}(\mathcal{L}_2^0)$ 可测，若

$$\int_E\left(\mathbb{E}\left(\int_0^T\|\sigma(s,x)\|_{\mathcal{L}_2^0}^2\,\mathrm{d}s\right)\right)^{\frac{1}{2}}\nu(\,\mathrm{d}x)<+\infty,$$

则

$$\int_E\left(\int_0^T\sigma(s,x)\,\mathrm{d}W_s\right)\nu(\,\mathrm{d}x)=\int_0^T\left(\int_E\sigma(s,x)\nu(\,\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}W_s,\quad a.s.. \tag{1.15}$$

1.2 Poisson 点过程的随机分析简介

以下内容可参看 Ikeda-Watanabe [25] 或龚光鲁 [26].

设 $(X,\mathcal{S})$ 为可测空间， M_X 为全体 $(X,\mathcal{S})$ 上非负整数值测度 (可以取 $+\infty$), $\mathcal{B}(M_X)$ 为使所有映射 $M_X\ni\mu\mapsto\mu(A)\in\overline{\mathbb{Z}_+}$ $(A\in\mathcal{S})$ 可测的最小 σ 代数.

定义 1.21 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为概率空间， λ 为 $(X,\mathcal{S})$ 上的 σ 有限测度， $\mu:\Omega\mapsto M_X$ 满足 $\mu\in\mathcal{F}/\mathcal{B}(M_X)$, 且

(1)$\forall A\in\mathcal{S}$, $\mu(A)$ 服从参数为 $\lambda(A)$ 的 Poisson 分布 (若 $\lambda(A)=+\infty$, 则令 $\mu(A)=+\infty$ a.s.)(即有 $\lambda(A)=\mathbb{E}(\mu(A))$),

(2)$\forall A_n\in\mathcal{S}$ 两两不交， $n=1,2,\cdots$, $\{\mu(A_n):n=1,2,\cdots\}$ 独立,

则称 μ 为 X 上的 Poisson 随机测度， λ 称为 μ 的强度测度.

定理 1.22 对任意的 $(X,\mathcal{S})$ 上的 σ 有限测度 λ, 必存在 X 上 Poisson 随机测度 μ, 使 λ 为其强度测度.

定义 1.23 设 $(U,\mathcal{E})$ 为可测空间， $p:\mathcal{D}_p\subset(0,\infty)\mapsto U$, 若 $\mathcal{D}_p$ 可数，则称 p 为 U 值点函数. 记

$$N_p((0,t]\times A)=\#\{s\in\mathcal{D}_p:s\leqslant t,p(s)\in A\},\qquad t>0,A\in\mathcal{E}, \tag{1.16}$$

则 $N_p\in M_{(0,\infty)\times U}$(其中 $\mathcal{B}(M_{(0,\infty)\times U})=\mathcal{B}((0,\infty))\times\mathcal{E}$), 此时称 N_p 为 $(0,\infty)\times U$ 上的计数测度，称 $N_p(t,A)=N_p((0,t]\times A)=\sum\limits_{s\in\mathcal{D}_p,s\leqslant t}I_A(p(s))$ 为计数过程.

设 Π_U 为全体 U 值点函数， $\mathcal{B}(\Pi_U)$ 为使所有映射 $\Pi_U\ni p\mapsto N_p(t,A)\in\overline{\mathbb{Z}_+}(t>0,A\in\mathcal{E})$ 可测的最小 σ 代数.

$\forall h>0$, 记 $D_{\theta_h p}=\{t\in(0,\infty):t+h\in D_p\}$, $(\theta_h p)(t)=p(t+h)$.

定义 1.24 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为概率空间，若 $p:\Omega\mapsto\Pi_U$ 满足 $p\in\mathcal{F}/\mathcal{B}(\Pi_U)$, 则称 p 为 U 值点过程. 再若 $\forall h>0$, $p\overset{d}{=}\theta_h p$, 则称 p 为平稳 U 值点过程.

定义 1.25 U 值点过程 p, 若 N_p 为 $(0,\infty)\times U$ 上 Poisson 随机测度, 则称 p 为 U 值 Poisson 点过程，其强度测度记为 n_p, 即 $n_p((0,t]\times A)=\mathbb{E}(N_p(t,A))$, $n_p(t,A)=n_p((0,t]\times A)$ 称为强度过程.

命题 1.26 U 值 Poisson 点过程 p 为平稳 U 值点过程等价于存在 $(U,\mathcal{E})$ 上的测度 n, 使 $n_p(\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u)=\mathrm{d}t\times n(\mathrm{d}u)$, 其中 n 称为 p 的特征测度.

定理 1.27 (Poisson 点过程的鞅刻画定理) p 为强度测度为 n_p 的 U 值 Poisson 点过程等价于 $\forall 0\leqslant s<t$, $A_i\in\mathcal{E}$ 两两不交, $\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n$, 有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i N_p((s,t]\times A_i)\right)\middle|\mathcal{F}_s\right)\\ =\ &\exp\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{-\lambda_i}-1)n_p((s,t]\times A_i)\right)\qquad a.s.,\end{aligned}\tag{1.17}$$

其中 $\mathcal{F}_t=\sigma(N_p((0,s]\times A),s\leqslant t,A\in\mathcal{E})$.

定理 1.28 对任意的 $(U,\mathcal{E})$ 上的 σ 有限测度 n, 必存在平稳 U 值 Poisson 点过程 p, 使 n 为其特征测度.

给定 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 为带流的概率空间.

定义 1.29 U 值点过程 p, 若 $\forall t>0$, $A\in\mathcal{E}$, 有 $N_p(t,A)\in\mathcal{F}_t$, 则称 p 为 U 值 $\mathcal{F}_t$- 适应点过程. 若 $\exists A_n\in\mathcal{E}$, $A_n\uparrow U$, 使 $\forall t>0$, $\mathbb{E}(N_p(t,A_n))<+\infty$, $n=1,2,\cdots$, 则称 p 为 U 值 σ 有限点过程. 对 U 值 σ 有限 $\mathcal{F}_t$- 适应 Poisson 点过程 p, 若 $\forall 0<s<t$, $A\in\mathcal{E}$, $N_p(t,A)-N_p(s,A)$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，则称 p 为 U 值 $\mathcal{F}_t$-Poisson 点过程.

记 $\Gamma_p=\{A\in\mathcal{E}:\mathbb{E}(N_p(t,A))<+\infty,\forall t>0\}$.

定义 1.30 U 值 σ 有限 $\mathcal{F}_t$- 适应点过程 p, 若存在 $\hat{N}_p$ 满足

(1)$\forall A\in\Gamma_p$, $\hat{N}_p(\cdot,A)$ 为连续 $\mathcal{F}_t$- 适应可积增过程,

(2)$\forall t>0$, a.a. $\omega\in\Omega$, $\hat{N}_p(t,\cdot)$ 为 $(U,\mathcal{E})$ 上的 σ 有限测度,

(3)$\forall A\in\Gamma_p$, $\tilde{N}_p(\cdot,A)=N_p(\cdot,A)-\hat{N}_p(\cdot,A)$ 为 $\mathcal{F}_t$- 鞅,

则称 p 为 U 值拟左连续点过程，称 $\hat{N}_p(t,A)$ 为 p 的补偿测度.

命题 1.31 U 值 $\mathcal{F}_t$-Poisson 点过程 p 为 U 值拟左连续点过程等价于 $\forall A\in\Gamma_p$, $\mathbb{E}(N_p(\cdot,A))$ 连续. 此时有 $\hat{N}_p(t,A)=\mathbb{E}(N_p(t,A))=n_p(t,A)$.

定理 1.32 若 p 为 U 值拟左连续点过程，则 $\forall A \in \Gamma_p$, $\tilde{N}_p(\cdot, A) \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$, 且有

$$\langle \tilde{N}_p(\cdot, A), \tilde{N}_p(\cdot, B)\rangle_t = \hat{N}_p(t, A \cap B), \qquad (A, B \in \Gamma_p). \tag{1.18}$$

即 $\tilde{N}_p$ 为正交鞅测度.

令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的可料 σ 代数. 给定 U 值拟左连续点过程 p. 记

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(H) &= \Big\{ f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times U \mapsto H \Big| f \in \mathcal{P} \times \mathcal{E}/\mathcal{B}(H), \\
&\quad \forall t, \int_0^t \int_U \|f(s,u)\| N_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u) < +\infty \text{ a.s.} \Big\}, \\
\mathcal{F}^p(H) &= \Big\{ f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times U \mapsto H \Big| f \in \mathcal{P} \times \mathcal{E}/\mathcal{B}(H), \\
&\quad \forall t, \mathbb{E} \int_0^t \int_U \|f(s,u)\|^p \hat{N}_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u) < +\infty \Big\}, \\
\mathcal{F}^p_{\mathrm{loc}}(H) &= \Big\{ f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times U \mapsto H \Big| f \in \mathcal{P} \times \mathcal{E}/\mathcal{B}(H), \\
&\quad \text{存在 } \mathcal{F}_t - \text{停时列 } \tau_n, \text{使 } \tau_n \uparrow \infty \text{ a.s., 且 } I_{[[0,\tau_n]]} f \in \mathcal{F}^p(H) \Big\}.
\end{aligned}$$

关于点过程的随机积分，我们给出如下性质：

命题 1.33 (1) 若 $f \in \mathcal{F}(H)$, 令 $A_t = \int_0^t \int_U f(s,u) N_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u)$, 则 A 满足

$$A_t = \sum_{s \in \mathcal{D}_p, s \leqslant t} f(s, p(s)), \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.19}$$

(2) 若 $f \in \mathcal{F}^1(H)$, 则 $M_t = \int_0^t \int_U f(s,u) \tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u) \in \mathcal{M}^1(H)$, 且满足

$$M_t = \int_0^t \int_U f(s,u) N_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u) - \int_0^t \int_U f(s,u) \hat{N}_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u). \tag{1.20}$$

(3) 若 $f \in \mathcal{F}^1(H) \cap \mathcal{F}^2(H)$, 则 $M_t = \int_0^t \int_U f(s,u) \tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u) \in \mathcal{M}^2(H)$, 且满足

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \int_U \|f(s,u)\|^2 \hat{N}_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u), \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.21}$$

(4) 若 $f \in \mathcal{F}^2(H)$, 则 $M_t = \int_0^t \int_U f(s,u) \tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u) \in \mathcal{M}^2(H)$, 且满足

$$\mathbb{E}(\|M_t\|^2) = \mathbb{E} \int_0^t \int_U \|f(s,u)\|^2 \hat{N}_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u), \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.22}$$

(5) 若 $f \in \mathcal{F}^2_{\mathrm{loc}}(H)$, 则 $M_t = \int_0^t \int_U f(s,u) \tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s, \,\mathrm{d}u) \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(H)$.

下面我们给出点过程随机积分的 Itô 公式：

命题 1.34 (Itô 公式) (1) 设 m 维半鞅

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + M_t + A_t + \int_0^t \int_U f(s,u)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u) \\ &\quad + \int_0^t \int_U g(s,u) N_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u), \end{aligned} \tag{1.23}$$

其中

(a) $X_0 \in \mathcal{F}_0/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$,

(b) $M \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$, 且 $M_0 = 0$ a.s.,

(c) $A \in \mathcal{V}_c(\mathbb{R}^m)$, 且 $A_0 = 0$ a.s.,

(d) p 为 U 值拟左连续点过程, $f \in \mathcal{F}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$, $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$, 且满足 $f^i g^j = 0$, $i,j = 1,2,\cdots,m$.

若 $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$, 则 $F(X_t)$ 为半鞅，且满足

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t F_i'(X_s)\,\mathrm{d}M_s^i + \sum_{i=1}^m \int_0^t F_i'(X_s)\,\mathrm{d}A_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \int_0^t F_{ij}''(X_s)\,\mathrm{d}\langle M^i, M^j\rangle_s \\ &\quad + \int_0^t \int_U \left(F(X_{s^-} + f(s,u)) - F(X_{s^-})\right) N_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u) \\ &\quad + \int_0^t \int_U \left(F(X_{s^-} + g(s,u)) - F(X_{s^-})\right) \tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u) \\ &\quad + \int_0^t \int_U \left(F(X_s + f(s,u)) - F(X_s) - \sum_{i=1}^m f^i(s,u)F_i'(X_s)\right) \hat{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u), \\ &\quad a.s.. \end{aligned} \tag{1.24}$$

(2) (参看何声武 - 汪嘉冈 - 严加安 [27]) 设 X 为 m 维半鞅, $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$, 则 $F(X_t)$ 为半鞅，且

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \sum_{i=1}^m F_i'(X_{s^-})\,\mathrm{d}X_s^i + \sum_{0<s\leqslant t}\left(\Delta F(X_s) - \sum_{i=1}^m F_i'(X_{s^-})\Delta X_s^i\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \int_0^t F_{ij}''(X_{s^-})\,\mathrm{d}\langle (X^i)^c, (X^j)^c\rangle_s \quad a.s., \end{aligned} \tag{1.25}$$

其中 X^c 表示 X 的连续局部鞅部分.

以下设 p 为 U 值拟左连续平稳 Poisson 点过程，其特征测度 n 为 $(U,\mathcal{E})$ 上的 σ 有限测度.

对 Hilbert 值纯跳随机积分，我们证明了如下的 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，它在本章主要结果的证明中起着非常重要的作用：

定理 1.35 (Burkholder-Davis-Gundy 不等式) 若 $p\geqslant 2$, $f\in\mathcal{F}^2_{\mathrm{loc}}(H)$, $M_t=\int_0^t\int_U f(s,u)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u)$, 则存在常数 $K_{p,t}>0$, 使得 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{s\leqslant t}\|M_s\|^p\right)\ &\leqslant\ K_{p,t}\int_0^t\left(\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\right.\\&\left.\qquad+\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{1.26}$$

为证明此定理，我们需要 Itô 公式 (命题 1.34(1)) 和下面的 Khintchine 不等式 (参看 Bass [28] 及 Nualart [29]) (参看 Ikeda-Watanabe [25]) 以及 Gronwall-Bellman 引理：

引理 1.36 (Khintchine 不等式) 设 $\{\xi_i, i\in\mathbb{N}\}$ 为某概率空间 $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}')$ 上的独立随机变量序列，且满足 $\mathbb{P}'(\xi_i=1)=\mathbb{P}'(\xi_i=-1)=\frac{1}{2}$, 则对 $p>0$, 存在常数 $A_p,B_p>0$, 使 $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$A_p\left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right)^{\frac{p}{2}}\leqslant\mathbb{E}'\left|\sum_{i=1}^k a_i\xi_i\right|^p\leqslant B_p\left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right)^{\frac{p}{2}}.\tag{1.27}$$

引理 1.37 (Gronwall-Bellman 引理) 设 g, h, λ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的非负函数， A 为 $\mathbb{R}_+$ 上的连续增函数. 若 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$g(t)\leqslant h(t)+\int_0^t\lambda(s)g(s)\,\mathrm{d}A(s),$$

则 $g(t)\leqslant h^*(t)\exp\left(\int_0^t\lambda(s)\,\mathrm{d}A(s)\right)$, 其中 $h^*(t)=\sup\limits_{s\leqslant t}|h(s)|$.

定理 1.35 的证明： 首先我们假设 $H=\mathbb{R}$. 由 Itô 公式，我们有

$$\begin{aligned}|M_t|^p\ &=\ \text{某零均值鞅}\\&\quad+\int_0^t\int_U\left(|M_s+f(s,u)|^p-|M_s|^p-pM_sf(s,u)|M_s|^{p-2}\right)n(\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

用 Taylor 公式， C_r 不等式和 Young 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(|M_t|^p\right)\\=\ &\frac{1}{2}p(p-1)\mathbb{E}\int_0^t\int_U\left(|M_s+\theta f(s,u)|^{p-2}|f(s,u)|^2\right)n(\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}s\qquad(0\leqslant\theta\leqslant 1)\\\leqslant\ &\frac{1}{2}p(p-1)(2^{p-3}\vee 1)\mathbb{E}\int_0^t\int_U\left(|f(s,u)|^2|M_s|^{p-2}+|f(s,u)|^p\right)n(\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{2}p(p-1)2^{p-2}\left(\frac{p-2}{p}\int_0^t \mathbb{E}\left(|M_s|^p\right)\,\mathrm{d}s+\frac{2}{p}\int_0^t \mathbb{E}\left(\int_U |f(s,u)|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\,\mathrm{d}s\right.\\
&\quad\left.+\int_0^t \mathbb{E}\left(\int_U |f(s,u)|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\,\mathrm{d}s\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}p(p-1)2^{p-2}\left(\int_0^t \mathbb{E}\left(|M_s|^p\right)\,\mathrm{d}s+\int_0^t\left(\mathbb{E}\left(\int_U |f(s,u)|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\mathbb{E}\left(\int_U |f(s,u)|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s\right).
\end{aligned}
$$

由 Gronwall-Bellman 引理 (引理 1.37), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(|M_t|^p\right)\\
\leqslant\ & \frac{1}{2}p(p-1)2^{p-2}\exp\left(\frac{1}{2}p(p-1)2^{p-2}t\right)\int_0^t\left(\mathbb{E}\left(\int_U |f(s,u)|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\right.\\
&\left.+\mathbb{E}\left(\int_U |f(s,u)|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s\\
=\ & \tilde{K}_{p,t}\int_0^t\left(\mathbb{E}\left(\int_U |f(s,u)|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)+\mathbb{E}\left(\int_U |f(s,u)|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

其中 $\tilde{K}_{p,t}=\frac{1}{2}p(p-1)2^{p-2}\exp\left(\frac{1}{2}p(p-1)2^{p-2}t\right)$.

对一般 Hilbert 空间 H, 我们选取 H 上的一列标准正交基 $\{e_i, i\in\mathbb{N}\}$, 由 (1.28) 式, Khintchine 不等式 (引理 1.36) 和 Fubini 定理可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k (M_t,e_i)^2\right)^{\frac{p}{2}}\\
\leqslant\ & \frac{1}{A_p}\mathbb{E}\mathbb{E}'\left|\sum_{i=1}^k (M_t,e_i)\xi_i\right|^p\\
=\ & \frac{1}{A_p}\mathbb{E}'\mathbb{E}\left|\int_0^t\int_U\left(\sum_{i=1}^k (f(s,u),e_i)\xi_i\right)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u)\right|^p\\
\leqslant\ & \frac{1}{A_p}\tilde{K}_{p,t}\mathbb{E}'\int_0^t\left(\mathbb{E}\int_U\left|\sum_{i=1}^k (f(s,u),e_i)\xi_i\right|^p n(\,\mathrm{d}u)\right.\\
&\left.+\mathbb{E}\left(\int_U\left|\sum_{i=1}^k (f(s,u),e_i)\xi_i\right|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s\\
=\ & \frac{1}{A_p}\tilde{K}_{p,t}\mathbb{E}\int_0^t\left(\int_U\mathbb{E}'\left|\sum_{i=1}^k (f(s,u),e_i)\xi_i\right|^p n(\,\mathrm{d}u)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbb{E}'\left(\int_U\left|\sum_{i=1}^k (f(s,u),e_i)\xi_i\right|^2 n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\Bigg)\,\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & \frac{1}{A_p}\tilde{K}_{p,t}\mathbb{E}\int_0^t\left(B_p\int_U\left(\sum_{i=1}^k (f(s,u),e_i)^2\right)^{\frac{p}{2}} n(\mathrm{d}u)\right.\\
&\left.+\left(\int_U\left(\mathbb{E}'\left|\sum_{i=1}^k (f(s,u),e_i)\xi_i\right|^p\right)^{\frac{2}{p}} n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s \quad (\text{由 Minkowski 不等式})\\
\leqslant\ & \frac{1}{A_p}\tilde{K}_{p,t}\mathbb{E}\int_0^t\left(B_p\int_U\|f(s,u)\|^p n(\mathrm{d}u)\right.\\
&\left.+\left(B_p^{\frac{2}{p}}\int_U\left(\sum_{i=1}^k (f(s,u),e_i)^2\right) n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & \frac{B_p}{A_p}\tilde{K}_{p,t}\mathbb{E}\int_0^t\left(\int_U\|f(s,u)\|^p n(\mathrm{d}u)+\left(\int_U\|f(s,u)\|^2 n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s\\
=\ & \bar{K}_{p,t}\int_0^t\left(\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^p n(\mathrm{d}u)\right)+\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^2 n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中 $\bar{K}_{p,t}=\dfrac{B_p}{A_p}\tilde{K}_{p,t}$. 故我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,\|M_t\|^p=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^\infty (M_t,e_i)^2\right)^{\frac{p}{2}}=\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k (M_t,e_i)^2\right)^{\frac{p}{2}}\\
\leqslant\ & \bar{K}_{p,t}\int_0^t\left(\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^p n(\mathrm{d}u)\right)+\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^2 n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

最后，不妨设 $f\in\mathcal{F}^2(H)$, 由 Doob 不等式,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{s\leqslant t}\|M_s\|^p\right)\\
\leqslant\ & \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}\left(\|M_t\|^p\right)\\
\leqslant\ & K_{p,t}\int_0^t\left(\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^p n(\mathrm{d}u)\right)+\mathbb{E}\left(\int_U\|f(s,u)\|^2 n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中 $K_{p,t}=\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p\bar{K}_{p,t}$. 注意到无论 M 是否为鞅上式都成立，故对 $f\in\mathcal{F}^2_{\mathrm{loc}}(H)$ 结论亦成立. 证毕. □

1.3 Hilbert 空间上的带跳随机微分方程

我们用 $\mathcal{D}(H)=\mathcal{D}(\mathbb{R}_+,H)$ 表示从 $\mathbb{R}_+$ 到 H 的右连左极映射全体. 令 $\mathcal{B}_t(\mathcal{D}(H))=$

$\sigma(X_s, s\leqslant t, X \in \mathcal{D}(H))$, $\mathcal{B}(\mathcal{D}(H)) = \mathcal{B}_\infty(\mathcal{D}(H))$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}_t(\mathcal{D}(H))$ 以及

$$\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}(H)) = \left\{ X : \Omega \mapsto \mathcal{D}(H) \middle| X \in \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathcal{D}(H)), \forall t, \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t} \|X_r\|^p\right) < +\infty \right\}.$$

沿用前两节中的记号，考虑如下 H 值非 Markov 型带跳随机微分方程:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \sigma(s, X)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \int_{U_0} f(s, X, u)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u) \\ &\quad + \int_0^t \int_{U-U_0} f(s, X, u) N_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u), \end{aligned} \tag{1.29}$$

其中

(A1) $X_0 : \Omega \to H$, 满足 $X_0 \in \mathcal{F}_0/\mathcal{B}(H)$, 且存在 $p\geqslant 2$, 使 $\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right) < +\infty$.

(A2) $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{D}(H) \mapsto \mathcal{L}_2^0$ 为定义在 $\Omega \times \mathcal{D}(H)$ 上关于 $\mathcal{G}_t$ 的 $\mathcal{L}_2^0$ 值可料过程. (若 $Q = I$, 则只要求 $\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathcal{D}(H))/\mathcal{B}(\mathcal{L}_2^0)$, 且 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\sigma(t,\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathcal{D}(H) \mapsto \mathcal{L}_2^0$ 为 $\mathcal{G}_t/\mathcal{B}(\mathcal{L}_2^0)$ 可测.)

(A3) $b : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{D}(H) \mapsto H$, 满足 $b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathcal{D}(H))/\mathcal{B}(H)$, 且 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $b(t,\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathcal{D}(H) \mapsto H$ 为 $\mathcal{G}_t/\mathcal{B}(H)$ 可测.

(A4) $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{D}(H) \times U \mapsto H$ 为定义在 $\Omega \times \mathcal{D}(H) \times U$ 上关于 $\mathcal{G}_t \times \mathcal{E}$ 的 H 值可料过程. $U_0 \in \mathcal{E}$, 且满足 $n(U - U_0) < +\infty$.

我们来证明本节的主要定理:

定理 1.38 设

(1) 存在函数 $H(t, u) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ 满足:

(1a) $H(t, u)$ 对固定的 $u \in \mathbb{R}_+$ 关于 t 局部可积，对固定的 $t \in \mathbb{R}_+$ 关于 u 为连续增函数,

(1b) $\forall t > 0$, $X \in \mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}(H))$ 有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\|\sigma(t, X)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}\right) + \mathbb{E}\left(\|b(t, X)\|^p\right) + \mathbb{E}\left(\int_{U_0} \|f(t, X, u)\|^p n(\,\mathrm{d}u)\right) \\ &+\mathbb{E}\left(\int_{U_0} \|f(t, X, u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}} \\ \leqslant\ & H\left(t, \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t} \|X_r\|^p\right)\right), \end{aligned}$$

(1c) $\forall K > 0$ 及初值 $u_0\geqslant 4^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right)$, 方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = KH(t, u)$$

有全局解.

(2) 存在函数 $G(t,u):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足：

(2a) $G(t,u)$ 对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 关于 t 局部可积，对固定的 $t\in\mathbb{R}_+$ 关于 u 为连续增函数，且 $G(t,0)=0$,

(2b) $\forall t>0$, $X,Y\in\mathfrak{L}^p_{\rm loc}(\mathcal{D}(H))$ 有

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}\right)+\mathbb{E}\left(\|b(t,X)-b(t,Y)\|^p\right)\\
& +\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(t,X,u)-f(t,Y,u)\|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\\
& +\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(t,X,u)-f(t,Y,u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\\
\leqslant\ & G\left(t,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r-Y_r\|^p\right)\right),
\end{aligned}
$$

(2c) $\forall K>0$, 若 $\mathbb{R}_+$ 上的非负函数 Z 满足 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$Z_t\leqslant K\int_0^t G(s,Z_s)\,\mathrm{d}s,$$

可得 $Z\equiv 0$.

则方程 (1.29) 的解存在且满足轨道唯一性.

证明. 设 $D=\{s\in D_p: p_s\in U-U_0\}$. 由于 $n(U-U_0)<+\infty$, 则 D 为 $(0,+\infty)$ 中的 a.s. 可数集. 令 $\tau_1<\tau_2<\cdots$ 为 D 中所有元素的一个排列. 易见 $\forall n$, τ_n 为 $\mathcal{F}_t$- 停时, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=+\infty$ a.s. (我们忽略 $n(U-U_0)=0$ 的平凡情形).

我们首先证明在区间 $[0,\tau_1]$ 上方程 (1.29) 解的存在唯一性. 考虑如下的随机微分方程：

$$Y_t = X_0+\int_0^t\sigma(s,Y)\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t b(s,Y)\,\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{U_0}f(s,Y,u)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u), \tag{1.30}$$

及其逐次逼近：

$$
\left\{
\begin{aligned}
Y_t^0 &= X_0,\\
Y_t^n &= X_0+\textstyle\int_0^t\sigma(s,Y^{n-1})\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t b(s,Y^{n-1})\,\mathrm{d}s\\
&\quad+\textstyle\int_0^t\int_{U_0}f(s,Y^{n-1},u)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u),\qquad n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
\right. \tag{1.31}
$$

注意到 $Y^0 = X_0 \in \mathfrak{L}^p_{\rm loc}(\mathcal{D}(H))$, 我们首先证明 $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y^n \in \mathfrak{L}^p_{\rm loc}(\mathcal{D}(H))$. 固定 $T > 0$, 考虑 $t \leqslant T$. 若对 $n \in \mathbb{N}$, $Y^{n-1} \in \mathfrak{L}^p_{\rm loc}(\mathcal{D}(H))$, 由 (1a), (1b), Hölder 不等式， Burkholder-Davis-Gundy 不等式 (命题 1.19 和定理 1.35), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|Y^n_r\|^p\right)\\
\leqslant\ & 4^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right) + 4^{p-1}C_pT^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t \mathbb{E}\|\sigma(s,Y^{n-1})\|^p_{\mathcal{L}_2^0}\,\mathrm{d}s\\
&+4^{p-1}T^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}\|b(s,Y^{n-1})\|^p\,\mathrm{d}s\\
&+4^{p-1}\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\left\|\int_0^r\int_{U_0} f(s,Y^{n-1},u)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u)\right\|^p\right)\\
\leqslant\ & 4^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right) + 4^{p-1}\left(C_pT^{\frac{p}{2}-1}+T^{p-1}\right)\int_0^t H\left(s,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|Y^{n-1}_r\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s\\
&+4^{p-1}K_{p,T}\int_0^t\left(\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(s,Y^{n-1},u)\|^p n(\,\mathrm{d}u)\right)\right.\\
&\left.+\mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(s,Y^{n-1},u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\right)\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & 4^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right) + 4^{p-1}\left(C_pT^{\frac{p}{2}-1}+T^{p-1}+K_{p,T}\right)\\
&\int_0^t H\left(s,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|Y^{n-1}_r\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s\\
=\ & 4^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right) + K\int_0^t H\left(s,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|Y^{n-1}_r\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中 $K = 4^{p-1}\left(C_pT^{\frac{p}{2}-1}+T^{p-1}+K_{p,T}\right)$. 由 (1c), 存在 u_t 满足

$$
u_t = u_0 + K\int_0^t H(s,u_s)\,\mathrm{d}s,
$$

其中 $u_0 \geqslant 4^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right)$. 注意到 $\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|Y^0_r\|^p\right) = \mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right)\leqslant u_t$, 由归纳法可知，若 $\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|Y^{n-1}_r\|^p\right)\leqslant u_t$, 则

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|Y^n_r\|^p\right)\\
\leqslant\ & u_0 + K\int_0^t H(s,u_s)\,\mathrm{d}s\\
=\ & u_t.
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

而且由于 $\sigma(\cdot,Y^{n-1})\in\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathcal{L}_2^0)$, $f(\cdot,Y^{n-1},u)\in\mathcal{P}\times\mathcal{E}/\mathcal{B}(H)$, 再次用 (1a) 和 (1b) 可得

$$
\int_0^t \mathbb{E}\|\sigma(s,Y^{n-1})\|^2_{\mathcal{L}_2^0}\,\mathrm{d}s
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left(\int_0^t \mathbb{E}\|\sigma(s,Y^{n-1})\|_{\mathcal{L}_2^0}^p \,\mathrm{d}s\right)^{\frac{2}{p}} t^{\frac{p-2}{p}}\\
&\leqslant \left(\int_0^t H\left(s,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|Y_r^{n-1}\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{2}{p}} T^{\frac{p-2}{p}}\\
&\leqslant \left(\int_0^t H(s,u_T)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{2}{p}} T^{\frac{p-2}{p}} < +\infty,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{U_0} \mathbb{E}\|f(s,Y^{n-1},u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & \left(\int_0^t \mathbb{E}\left(\int_{U_0}\|f(s,Y^{n-1},u)\|^2 n(\,\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{2}{p}} t^{\frac{p-2}{p}}\\
\leqslant\ & \left(\int_0^t H\left(s,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|Y_r^{n-1}\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{2}{p}} T^{\frac{p-2}{p}}\\
\leqslant\ & \left(\int_0^t H(s,u_T)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{2}{p}} T^{\frac{p-2}{p}} < +\infty,
\end{aligned}
$$

即有

$$
\sigma(\cdot,Y^{n-1}) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{L}_0^2),
$$

以及

$$
f(\cdot,Y^{n-1},u) \in \mathcal{F}^2(H).
$$

由命题 1.15 和命题 1.33 可知 Y^n 有定义，且 $Y^n \in \mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}^p(\mathcal{D}(H))$.

同理我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|Y_r^m - Y_r^n\|^p\right)\\
\leqslant\ & 3^{p-1}C_pT^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t \mathbb{E}\|\sigma(s,Y^{m-1})-\sigma(s,Y^{n-1})\|_{\mathcal{L}_2^0}^p\,\mathrm{d}s\\
& +3^{p-1}T^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}\|b(s,Y^{m-1})-b(s,Y^{n-1})\|^p\,\mathrm{d}s\\
& +3^{p-1}\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\left\|\int_0^r\int_{U_0}\left(f(s,Y^{m-1},u)-f(s,Y^{n-1},u)\right)\tilde{N}_p(\,\mathrm{d}s,\,\mathrm{d}u)\right\|^p\right)\\
\leqslant\ & 3^{p-1}\left(C_pT^{\frac{p}{2}-1}+T^{p-1}+K_{p,T}\right)\int_0^t G\left(s,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|Y_r^{m-1}-Y_r^{n-1}\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & K\int_0^t G\left(s,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|Y_r^{m-1}-Y_r^{n-1}\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

令

$$Z_t = \overline{\lim_{m,n\to\infty}} \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|Y_r^m - Y_r^n\|^p\right),$$

由 (1.32) 式，(2a) 和 Fatou 引理易得

$$Z_t \leqslant K\int_0^t G(s, Z_s)\,\mathrm{d}s.$$

用 (2c) 立得 $Z\equiv 0$, 故有

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|Y_r^m - Y_r^n\|^p\right) = 0. \tag{1.33}$$

我们用 $\mathcal{D}_T(H)$ 表示从 $[0,T]$ 到 H 的右连左极映射全体. $\forall X\in\mathcal{D}_T(H)$, 定义

$$\|X\|_{\mathcal{D}_T(H)} = \sup_{t\leqslant T}\|X_t\|,$$

则 $(\mathcal{D}_T(H), \|\cdot\|_{\mathcal{D}_T(H)})$ 为 Banach 空间，故 $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{D}_T(H))$ 也为 Banach 空间. 又 (1.33) 式说明 $\{Y^n, n\in\mathbb{N}\}$ 为 $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{D}_T(H))$ 中的 Cauchy 列，故其极限过程存在，我们将其表示为 Y. 由 Y^n 的右连左极性可知 Y 是一 H 值右连左极半鞅. 在 (1.31) 式中令 $n\to\infty$, 取 $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{D}_T(H))$ 中的极限，易证 $\forall t\leqslant T$, Y 满足方程 (1.30), 即我们已证明方程 (1.30) 的解的存在性.

若 Y 和 Y' 为方程 (1.30) 的两个解，同上可得 $\forall t\leqslant T$, 有

$$\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|Y_r - Y_r'\|^p\right)\leqslant K\int_0^t G\left(s, \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|Y_r - Y_r'\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s,$$

和

$$\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|Y_r - Y_r'\|^p\right)\equiv 0,$$

这样就得到了方程 (1.30) 的解的唯一性. 显然，$Y\in\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}(H))$, 且 $\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|Y_r\|^p\right)$ $\leqslant u_t$.

定义

$$X_t = \tilde{X}_t^1 = \begin{cases} Y_t, & (0\leqslant t<\tau_1) \\ Y_{\tau-} + f(\tau, Y, p_\tau), & (t=\tau_1) \end{cases}.$$

显然 $\{X_t, t\in[0,\tau_1]\}$ 为方程 (1.29) 在区间 $[0,\tau_1]$ 上的唯一解. 再设 $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+\tau_1}$, $\tilde{X}_0 = \tilde{X}^1_{\tau_1}$, $\tilde{W}_t = W_{t+\tau_1} - W_{\tau_1}$, $\tilde{p}_t = p_{t+\tau_1}$, 且 $\tilde{\tau}_1 = \tau_2 - \tau_1$, 其中 $\tilde{D}_{\tilde{p}} = \{s: s+\tau_1\in D_p\}$. 仿照前面得到 $\tilde{X}^1$ 的步骤，我们可得对应于 $\tilde{\mathcal{F}}_t$, $\tilde{X}_0$, $\tilde{W}_t$, $\tilde{p}_t$ 的在区间 $[0,\tilde{\tau}_1]$ 上的过程 $\tilde{X}^2$. 定义

$$X_t = \begin{cases} \tilde{X}_t^1, & (0\leqslant t\leqslant\tau_1) \\ \tilde{X}^2_{t-\tau_1}, & (\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2) \end{cases}.$$

易见 $\{X_t, t\in[0,\tau_2]\}$ 为方程 (1.29) 在区间 $[0,\tau_2]$ 上的唯一解. 重复以上步骤, $\forall n$, 我们可以得到 X 在区间 $[0,\tau_n]$ 上的值, 故能确定方程 (1.29) 的全局唯一解 X. 证毕. □

引理 1.39 (参看 Taniguchi [5]) 设 $G(t,u):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$, $G(t,0)=0$ 满足对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 关于 t 局部可积, 对固定的 $t\in\mathbb{R}_+$ 关于 u 为连续增函数. 且若 u 为方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=G(t,u)$$

的解, 由 $u_0=0$, 有 $u\equiv 0$. 则由 $\mathbb{R}_+$ 上的非负函数 Z 满足 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, 且

$$Z_t\leqslant\int_0^t G(s,Z_s)\,\mathrm{d}s,$$

可得 $Z\equiv 0$.

注 1.40 设 $G(t,u)=\lambda(t)\gamma(u)$, 其中 λ 为非负局部可积函数, $\gamma:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 为连续增函数, $\gamma(0)=0$ 且满足 $\int_{0^+}\frac{1}{\gamma(u)}\,\mathrm{d}u=+\infty$. 由常微分方程的比较定理 可知, G 满足引理 1.39 中的条件. 若再设 $\gamma(u)$ 或 $\frac{\gamma(u)^2}{u}$ 为凹函数, σ,b,f 为非随机的, 满足 $\forall t>0$, $X,Y\in\mathcal{D}(H)$, 有 $\|\sigma(t,0)\|_{\mathcal{L}_2^0}$, $\|b(t,0)\|$, $\left(\int_{U_0}\|f(s,0,u)\|^p n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{1}{p}}$, $\left(\int_{U_0}\|f(s,0,u)\|^2 n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{1}{2}}\in\mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, 且

$$\begin{aligned}&\|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}+\|b(t,X)-b(t,Y)\|^p\\&+\int_{U_0}\|f(s,X,u)-f(s,Y,u)\|^p n(\mathrm{d}u)\\&+\left(\int_{U_0}\|f(s,X,u)-f(s,Y,u)\|^2 n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\\\leqslant\ &\lambda(t)\gamma\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r-Y_r\|^p\right),\end{aligned}\tag{1.34}$$

则 σ,b,f 满足定理 1.38 中的 (1a)-(1c) 和 (2a)-(2c), 其中

$$\begin{aligned}H(t,u)\ =\ &2^{p-1}\Bigg(4G(t,u)+\|\sigma(t,0)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}+\|b(t,0)\|^p\\&+\int_{U_0}\|f(s,0,u)\|^p n(\mathrm{d}u)+\left(\int_{U_0}\|f(s,0,u)\|^2 n(\mathrm{d}u)\right)^{\frac{p}{2}}\Bigg).\end{aligned}$$

故我们的结果为 Yamada(参看 [3]) 的结果的推广.

引理 1.41 (1)(参看 Nie [21] 和 Liang [22]) 设非负数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^n p_i\leqslant 1$, $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数, 满足 $\rho_i(0)=0$, $1\leqslant i\leqslant n$, 则 $\gamma(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\prod_{i=1}^n\rho_i(u_i^{p_i})$ 为 $\mathbb{R}^n_+$ 上的在序意义下的增凹函数 (参看定义 3.7), 且满足 $\gamma(0,0,\cdots,0)=0$.

(2) 设 ρ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数，满足 $\rho(0)=0$, 则 $\forall 1\leqslant p\leqslant q$, $\gamma(u)=\rho^p(u^{\frac{1}{q}})$ 也为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数，且有 $\gamma(0)=0$.

证明. 只证明 (2). 显然，$\dfrac{\rho(u)}{u}$ 为 $(0,\infty)$ 上的非负连续减函数，且 ρ'_+ 为 $(0,\infty)$ 上的非负右连续减函数. 故

$$\gamma'_+(u)=\frac{p}{q}\rho^{p-1}(u^{\frac{1}{q}})u^{\frac{1-q}{q}}\rho'_+(u^{\frac{1}{q}})=\frac{p}{q}\left(\frac{\rho(u^{1/q})}{u^{1/q}}\right)^{p-1}\frac{1}{u^{1-p/q}}\rho'_+(u^{\frac{1}{q}})$$

为 $(0,\infty)$ 上的非负右连续减函数，因此 γ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的凹函数. □

注 1.42 设 $\gamma(u)=\sum\limits_{i=1}^{k}\rho_i^p(u^{\frac{1}{p}})$，其中 ρ_i 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数，满足 $\rho_i(0)=0$ 且 $\displaystyle\int_{0^+}\frac{u^{p-1}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\rho_i^p(u)}\mathrm{d}u=+\infty$. 由引理 1.41(2), γ 满足注 1.40 中的条件. 例如 $p=2$ 时，我们可取

$$\rho_1(u)=u,$$

$$\rho_2(u)=\begin{cases}0 & (u=0)\\ u(\log\frac{1}{u})^{\alpha} & (0<u\leqslant\delta)\\ \delta(\log\frac{1}{\delta})^{\alpha} & (u>\delta)\end{cases},\qquad \left(\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

$$\rho_3(u)=\begin{cases}0 & (u=0)\\ u(\log\frac{1}{u})^{1/3}\log\log\frac{1}{u} & (0<u\leqslant\delta)\\ \delta(\log\frac{1}{\delta})^{1/3}\log\log\frac{1}{\delta} & (u>\delta)\end{cases},$$

其中 $\delta\in(0,1)$ 充分小.

例 1.43 我们给出一个例子, 它包括了环的同胚群上的 Brown 运动 (参看 [2, 1]). 令 $p=2$, $q>0$, $\{g_k,k\in\mathbb{N}\}$ 为 $\mathcal{L}_2^0$ 上的一列标准正交基. $\forall t>0$, $X\in\mathcal{D}(H)$, $u\in U$, 设

$$\begin{cases}\sigma(t,X) &= \sum\limits_k\sigma_k(t,X)g_k,\\ b(t,X) &= 0,\\ f(t,X,u) &= 0,\end{cases}$$

其中 $\sigma_{2k+1}(t,X)=a_{2k+1}\sqrt{\lambda(t)}\sin\left(k^q\sup\limits_{r\leqslant t}\|X_r\|\right)$, $\sigma_{2k}(t,X)=a_{2k}\sqrt{\lambda(t)}\cos\left(k^q\sup\limits_{r\leqslant t}\|X_r\|\right)$, $a_{2k}=O\left(k^{-(q+\frac{1}{2})}\right)$, $a_{2k+1}=O\left(k^{-(q+\frac{1}{2})}\right)$, λ 为非负局部可积函数. 由下面的定理 1.44, 当 $\sup\limits_{r\leqslant t}\|X_r-Y_r\|$ 充分小时，我们有

$$\|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\|^2_{\mathcal{L}_2^0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda(t)\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{2k}^2\left(\cos\left(k^q\sup_{r\leqslant t}\|X_r\|\right)-\cos\left(k^q\sup_{r\leqslant t}\|Y_r\|\right)\right)^2\right.\\
&\quad\left.+a_{2k+1}^2\left(\sin\left(k^q\sup_{r\leqslant t}\|X_r\|\right)-\sin\left(k^q\sup_{r\leqslant t}\|Y_r\|\right)\right)^2\right)\\
&\leqslant C\lambda(t)\sum_{k=1}^{\infty}k^{-(2q+1)}\sin^2\left(\frac{k^q\sup_{r\leqslant t}\|X_r-Y_r\|}{2}\right)\\
&= C\lambda(t)h\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r-Y_r\|\right)\\
&\leqslant C\lambda(t)\rho^2\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r-Y_r\|\right)\\
&= G\left(t,\sup_{r\leqslant t}\|X_r-Y_r\|^2\right),
\end{aligned}
$$

其中 $h(u)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-(2q+1)}\sin^2\dfrac{k^qu}{2}$, $G(t,u)=C\lambda(t)\rho^2(u^{\frac{1}{2}})$, 以及

$$
\rho(u)=\begin{cases}0 & (u=0)\\ u(\log\frac{1}{u})^{1/2} & (0<u\leqslant\delta)\\ \delta(\log\frac{1}{\delta})^{1/2} & (u>\delta)\end{cases},\qquad (\delta\in(0,1)\text{充分小}).
$$

定理 1.44 设 $h(u)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-(2q+1)}\sin^2\dfrac{k^qu}{2}$, 则存在常数 $C>0$, 使

$$
h(u)\leqslant Cu^2\log\frac{1}{u} \tag{1.35}
$$

对任意充分小的 u 成立.

证明. 证明主要思想来源于 Airault-Ren [2], 为了读者的方便, 我们给出详细的证明过程.

由梯形公式:

$$
\frac{1}{2}\left(F(a)+F(a+1)\right)=\int_a^{a+1}F(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^{a+1}\left(\frac{t-a}{2}-\frac{(t-a)^2}{2}\right)F''(t)\,\mathrm{d}t,
$$

我们得到

$$
\sum_{k=1}^{n}F(k)=\frac{1}{2}F(1)+\frac{1}{2}F(n)+\int_1^nF(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^nb(t)F''(t)\,\mathrm{d}t,
$$

其中 $b(t)=\dfrac{t-[t]}{2}-\dfrac{(t-[t])^2}{2}$ ($[t]$ 表示 t 的整数部分). 因此

$$
h(u)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-(2q+1)}\sin^2\frac{k^qu}{2}=\frac{1}{2}\sin^2\frac{u}{2}+\int_1^{\infty}\frac{\sin^2\frac{t^qu}{2}}{t^{2q+1}}\,\mathrm{d}t+\int_1^{\infty}b(t)l(t)\,\mathrm{d}t,
$$

其中

$$l(t)=\left(\frac{\sin^2\frac{t^q u}{2}}{t^{2q+1}}\right)''=\frac{q^2u^2\cos t^q u}{2t^3}-\frac{(3q+3)qu\sin t^q u}{2t^{q+3}}+\frac{(2q+1)(2q+2)\sin^2\frac{t^q u}{2}}{t^{2q+3}}.$$

上式第一项 $=O(u^2)$. 首先我们估计第三项，$\forall 0<u<1$,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty b(t)l(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{qu^{1/q}}\int_u^\infty b\left(\left(\frac{t}{u}\right)^{1/q}\right)l\left(\left(\frac{t}{u}\right)^{1/q}\right)t^{1/q-1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{q^2u^2}{4}\int_1^\infty\frac{2b(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t+\frac{u^{2/q+2}}{q}\int_u^\infty b\left(\left(\frac{t}{u}\right)^{1/q}\right)e(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中

$$e(t)=\frac{q^2(\cos t-1)}{2t^{2/q+1}}-\frac{(3q+3)q\sin t}{2t^{2/q+2}}+\frac{(2q+1)(2q+2)\sin^2\frac{t}{2}}{t^{2/q+3}}=\sum_{k=0}^\infty c_k t^{2k-2/q+1},$$

其中 $\{c_k,k\geqslant 0\}$ 为一列常数. 将梯形公式应用于函数 $1/t$, 则

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_1^n\frac{2b(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

故

$$\int_1^\infty\frac{2b(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\log n\right)=-\frac{1}{2}+\mathrm{c},$$

其中 c 为 Euler 常数. 令

$$I(u)=\int_u^\infty b\left(\left(\frac{t}{u}\right)^{1/q}\right)e(t)\,\mathrm{d}t.$$

注意到 $0\leqslant b(t)\leqslant\dfrac{1}{8}$, $\forall t\in\mathbb{R}$, 且 $|e(t)|\leqslant\dfrac{q^2}{2t^{2/q+1}}+\dfrac{(3q+3)q}{2t^{2/q+2}}+\dfrac{(2q+1)(2q+2)}{t^{2/q+3}}$, $\forall t>0$, 则

$$|I(u)|\leqslant\frac{1}{8}\int_u^\infty|e(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{8}\left(\int_u^1|e(t)|\,\mathrm{d}t+\int_1^\infty|e(t)|\,\mathrm{d}t\right)=O(u^{-\frac{2}{q}}).$$

故

$$\int_1^\infty b(t)l(t)\,\mathrm{d}t=q^2u^2\left(-\frac{1}{8}+\frac{\mathrm{c}}{4}\right)+\frac{u^{2/q+2}}{q}I(u)=O(u^2).$$

接下来我们考虑第二项，注意到 $\forall 0<u<1$,

$$\int_1^\infty\frac{\sin^2\frac{t^q u}{2}}{t^{2q+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{u^2}{q}\int_u^\infty\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{u^2}{q}\left(\int_1^\infty\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^3}\,\mathrm{d}t+\int_u^1\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^3}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4q}u^2\log\left(\frac{1}{u}\right)+\frac{u^2}{q}\left(\int_1^\infty \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^3}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1-t^2/2-\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t\right)\\
&\quad+\frac{u^2}{2q}\int_0^u\frac{\cos t-1+t^2/2}{t^3}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

对 Euler 常数 c,

$$
\mathrm{c}=\int_0^1\frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^\infty\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.
$$

用两次分部积分法，我们得到

$$
\int_1^\infty \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^3}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1-t^2/2-\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{8}-\frac{\mathrm{c}}{4}.
$$

另一方面，

$$
J(u)=\frac{1}{2u^2}\int_0^u\frac{\cos t-1+t^2/2}{t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k u^{2k}}{(k+1)(2k+4)!}=O(1),
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty\frac{\sin^2\frac{t^q u}{2}}{t^{2q+1}}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4q}u^2\log\left(\frac{1}{u}\right)+\left(\frac{3}{8q}-\frac{\mathrm{c}}{4q}\right)u^2+\frac{1}{q}u^4J(u)\\
&=\frac{1}{4q}u^2\log\left(\frac{1}{u}\right)+O(u^2).
\end{aligned}
$$

故 $\forall 0<u<1$,

$$
h(u)\leqslant\frac{1}{4q}u^2\log\left(\frac{1}{u}\right)+O(u^2)=O\left(u^2\log(\frac{1}{u})\right).
$$

证毕. □

1.4 Hilbert 空间上的倒向随机微分方程

沿用前三节中的记号, 设 W 为完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 K 值柱 I-Brown 运动, $\mathcal{F}_t$ 为由 W 生成的完备自然 σ 代数流， $T>0$, $\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_2(K,H)$. 记

$\mathcal{L}^2([0,T],H)=\{b:[0,T]\times\Omega\mapsto H|\ b$ 为可测适应 H 值过程, $\int_0^T\mathbb{E}\|b_s\|^2\,\mathrm{d}s<+\infty\}$,

$\mathcal{L}^2([0,T],\mathcal{L}_2)=\{\sigma:[0,T]\times\Omega\mapsto\mathcal{L}_2|\ \sigma$ 为可测适应 $\mathcal{L}_2$ 值过程, $\int_0^T\mathbb{E}\|\sigma_s\|^2_{\mathcal{L}_2}\,\mathrm{d}s<+\infty\}$,

它们分别依范数 $\|b\|_{\mathcal{L}^2([0,T],H)}=\left(\int_0^T\mathbb{E}\|b_s\|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}$ 和 $\|\sigma\|_{\mathcal{L}^2([0,T],\mathcal{L}_2)}=\left(\int_0^T\mathbb{E}\|\sigma_s\|^2_{\mathcal{L}_2}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}$ 为 Hilbert 空间.

考虑如下 H 值半线性倒向随机微分方程:

$$X_T = X_t + \int_t^T (\sigma(s, X_s) + Y_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_t^T b(s, X_s, Y_s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.36}$$

其中

(A1$'$) $X_T : \Omega \to H$, 满足 $X_T \in \mathcal{F}_T/\mathcal{B}(H)$, 且 $\mathbb{E}\|X_T\|^2 < +\infty$.

(A2$'$) $\sigma : [0,T] \times \Omega \times H \mapsto \mathcal{L}_2$, 满足 $\sigma \in \mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}(H)/\mathcal{B}(\mathcal{L}_2)$, 且 $\forall t \in [0,T]$, $\sigma(t,\cdot,\cdot) : \Omega \times H \mapsto \mathcal{L}_2$ 为 $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}(H)/\mathcal{B}(\mathcal{L}_2)$ 可测.

(A3$'$) $b : [0,T] \times \Omega \times H \times \mathcal{L}_2 \mapsto H$, 满足 $b \in \mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(\mathcal{L}_2)/\mathcal{B}(H)$, 且 $\forall t \in [0,T]$, $b(t,\cdot,\cdot,\cdot) : \Omega \times H \times \mathcal{L}_2 \mapsto H$ 为 $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(\mathcal{L}_2)/\mathcal{B}(H)$ 可测.

为了给出我们的主要结论, 首先介绍一个引理, 其证明可参看 Hu-Peng [13, 命题 2.1], 其中我们对条件 (1.38) 式做了一个修正.

考虑如下 H 值半线性倒向随机微分方程:

$$X_T = X_t + \int_t^T (\sigma(s) + Y_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_t^T b(s, Y_s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.37}$$

其中

(A1$''$) $X_T : \Omega \to H$, 满足 $X_T \in \mathcal{F}_T/\mathcal{B}(H)$, 且 $\mathbb{E}\|X_T\|^2 < +\infty$.

(A2$''$) $\sigma \in \mathcal{L}^2([0,T], \mathcal{L}_2)$.

(A3$''$) $b : [0,T] \times \Omega \times \mathcal{L}_2 \mapsto H$, 满足 $b \in \mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathcal{L}_2)/\mathcal{B}(H)$, 且 $\forall t \in [0,T]$, $b(t,\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathcal{L}_2 \mapsto H$ 为 $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}(\mathcal{L}_2)/\mathcal{B}(H)$ 可测.

引理 1.45 设

(1) $b(t,\omega,0) \in \mathcal{L}^2([0,T], H)$,

(2) $\forall t \in [0,T]$, Y, $Y' \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{L}_2)$, 存在常数 $C > 0$, 使

$$\mathbb{E}\|b(t,Y) - b(t,Y')\|^2 \leqslant C\mathbb{E}\|Y - Y'\|^2_{\mathcal{L}_2}, \tag{1.38}$$

则方程 (1.37) 的解存在唯一.

注 1.46 方程 (1.36) 有解是指 $\exists (X,Y) \in \mathcal{L}^2([0,T], H) \times \mathcal{L}^2([0,T], \mathcal{L}_2)$ 满足方程 (1.36). 方程 (1.36) 的解唯一是指若 (X,Y) 和 (X',Y') 均为方程 (1.36) 的解, 则

$$\int_0^T \mathbb{E}\|X_s - X'_s\|^2\,\mathrm{d}s < +\infty, \int_0^T \mathbb{E}\|Y_s - Y'_s\|^2_{\mathcal{L}_2}\,\mathrm{d}s < +\infty.$$

我们来证明本节的主要定理:

定理 1.47 设

(1) 存在函数 $H(t,u):[0,T]\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足：

(1a) $H(t,u)$ 对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 有 $\int_0^T H(s,u)\,\mathrm{d}s<+\infty$, 对固定的 $t\in[0,T]$ 关于 u 为连续增函数,

(1b) 存在常数 $C>0$, 使 $\forall t\in[0,T]$, $X\in\mathcal{L}^2(\Omega,H)$, $Y\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{L}_2)$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\sigma(t,X)\|_{\mathcal{L}_2}^2 &\leqslant H\left(t,\mathbb{E}\|X\|^2\right),\\ \mathbb{E}\|b(t,X,Y)\|^2 &\leqslant H\left(t,\mathbb{E}\|X\|^2\right)+C\mathbb{E}\|Y\|_{\mathcal{L}_2}^2,\end{aligned}$$

(1c) $\forall K>0$ 及终值 $u_T\geqslant 0$, 方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-KH(t,u)$$

在 $[0,T]$ 有解.

(2) 存在函数 $G(t,u):[0,T]\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足：

(2a) $G(t,u)$ 对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 有 $\int_0^T G(s,u)\,\mathrm{d}s<+\infty$, 对固定的 $t\in[0,T]$ 关于 u 为连续增函数，且 $G(t,0)=0$,

(2b) $\forall t\in[0,T]$, $X,X'\in\mathcal{L}^2(\Omega,H)$, $Y,Y'\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{L}_2)$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\sigma(t,X)-\sigma(t,X')\|_{\mathcal{L}_2}^2 &\leqslant G\left(t,\mathbb{E}\|X-X'\|^2\right),\\ \mathbb{E}\|b(t,X,Y)-b(t,X',Y')\|^2 &\leqslant G\left(t,\mathbb{E}\|X-X'\|^2\right)+C\mathbb{E}\|Y-Y'\|_{\mathcal{L}_2}^2,\end{aligned}$$

(2c) $\forall K>0$, 若 $[0,T]$ 上的非负函数 Z 满足 $\forall t\in[0,T]$,

$$Z_t\leqslant K\int_t^T G(s,Z_s)\,\mathrm{d}s,$$

可得 $Z\equiv 0$.

则方程 (1.36) 的解存在唯一.

证明. 考虑如下的逐次逼近：

$$\left\{\begin{aligned} X_t^0 &= 0, Y_t^0=0,\\ X_T &= X_t^n+\textstyle\int_t^T(\sigma(s,X_s^{n-1})+Y_s^n)\,\mathrm{d}W_s+\int_t^T b(s,X_s^{n-1},Y_s^n)\,\mathrm{d}s, \qquad n\in\mathbb{N}.\end{aligned}\right. \tag{1.39}$$

注意到 $X^0=0\in\mathcal{L}^2([0,T],H)$, 我们首先证明 $\forall n\in\mathbb{N}$, 方程 (1.39) 存在唯一解 (X^n,Y^n). 若对 $n\in\mathbb{N}$, $X^{n-1}\in\mathcal{L}^2([0,T],H)$, 由 Itô 公式 (命题 1.18), (1a), (1b), Young 不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|X_t^n\|^2+\mathbb{E}\int_t^T\|Y_s^n\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s\\
=\;&\mathbb{E}\|X_T\|^2-2\mathbb{E}\int_t^T(X_s^n,b(s,X_s^{n-1},Y_s^n))\,\mathrm{d}s-\mathbb{E}\int_t^T\|\sigma(s,X_s^{n-1})\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s\\
&-2\mathbb{E}\int_t^T\operatorname{tr}\left(\sigma(s,X_s^{n-1})(Y_s^n)^*\right)\,\mathrm{d}s\\
\leqslant\;&\mathbb{E}\|X_T\|^2+2(C+1)\mathbb{E}\int_t^T\|X_s^n\|^2\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2(C+1)}\mathbb{E}\int_t^T\|b(s,X_s^{n-1},Y_s^n)\|^2\,\mathrm{d}s\\
&+2(C+1)\mathbb{E}\int_t^T\|\sigma(s,X_s^{n-1})\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2(C+1)}\mathbb{E}\int_t^T\|Y_s^n\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s\\
\leqslant\;&\mathbb{E}\|X_T\|^2+2(C+1)\mathbb{E}\int_t^T\|X_s^n\|^2\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T\|Y_s^n\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s\\
&+\left(2(C+1)+\frac{1}{2(C+1)}\right)\int_t^T H(s,\mathbb{E}\|X_s^{n-1}\|^2)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|X_t^n\|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T\|Y_s^n\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s\\
\leqslant\;&\mathbb{E}\|X_T\|^2+2(C+1)\mathbb{E}\int_t^T\|X_s^n\|^2\,\mathrm{d}s\\
&+\left(2(C+1)+\frac{1}{2(C+1)}\right)\int_t^T H(s,\mathbb{E}\|X_s^{n-1}\|^2)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由 Gronwall-Bellman 引理 知

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|X_t^n\|^2\\
\leqslant\;&\mathrm{e}^{2(C+1)T}\left(\mathbb{E}\|X_T\|^2+\left(2(C+1)+\frac{1}{2(C+1)}\right)\int_t^T H(s,\mathbb{E}\|X_s^{n-1}\|^2)\,\mathrm{d}s\right).
\end{aligned}
$$

由 (1c), 存在 u_t 满足

$$
u_t=u_T+K\int_t^T H(s,u_s)\,\mathrm{d}s,
$$

其中 $u_T=\mathrm{e}^{2(C+1)T}\mathbb{E}\|X_T\|^2\geqslant 0$, $K=\mathrm{e}^{2(C+1)T}\left(2(C+1)+\frac{1}{2(C+1)}\right)$. 注意到 $\mathbb{E}\|X_t^0\|^2=0\leqslant u_t$, 由 (1a), (1b), (2b) 以及归纳法可知，若 $\mathbb{E}\|X_t^{n-1}\|^2\leqslant u_t$, 则有

$$
\int_0^T\mathbb{E}\|b(s,X_s^{n-1},0)\|^2\,\mathrm{d}s
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^T H(s, \mathbb{E}\|X_s^{n-1}\|^2)\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T H(s, u_s)\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T H(s, u_0)\,\mathrm{d}s < +\infty,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \mathbb{E}\|\sigma(s, X_s^{n-1})\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & \int_0^T H(s, \mathbb{E}\|X_s^{n-1}\|^2)\,\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & \int_0^T H(s, u_s)\,\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & \int_0^T H(s, u_0)\,\mathrm{d}s < +\infty,
\end{aligned}
$$

以及 $\forall Y, Y' \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{L}_2)$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|b(t, X_t^{n-1}, Y) - b(t, X_t^{n-1}, Y')\|^2 \\
\leqslant\ & C\mathbb{E}\|Y - Y'\|_{\mathcal{L}_2}^2,
\end{aligned}
$$

故由引理 1.45 可知方程 (1.39) 存在唯一解 (X^n, Y^n), 且有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|X_t^n\|^2 \\
\leqslant\ & u_T + K\int_t^T H(s, u_s)\,\mathrm{d}s \\
=\ & u_t,
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T \|Y_s^n\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & \mathbb{E}\|X_T\|^2 + 2(C+1)\mathbb{E}\int_t^T \|X_s^n\|^2\,\mathrm{d}s \\
& + \left(2(C+1) + \frac{1}{2(C+1)}\right)\int_t^T H(s, \mathbb{E}\|X_s^{n-1}\|^2)\,\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & \mathbb{E}\|X_T\|^2 + 2(C+1)\int_t^T u_s\,\mathrm{d}s \\
& + \left(2(C+1) + \frac{1}{2(C+1)}\right)\int_t^T H(s, u_s)\,\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & 2(C+1)Tu_t + \mathrm{e}^{-2(C+1)T}u_t \\
\leqslant\ & \left(2(C+1)T + \mathrm{e}^{-2(C+1)T}\right)u_t,
\end{aligned}
$$

故有

$$\mathbb{E}\int_0^T \|Y_s^n\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s\leqslant 2\left(2(C+1)T+\mathrm{e}^{-2(C+1)T}\right)u_0. \tag{1.41}$$

同理我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|X_t^n-X_t^m\|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T \|Y_s^n-Y_s^m\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s\\
\leqslant\;& 2(C+1)\mathbb{E}\int_t^T \|X_s^n-X_s^m\|^2\,\mathrm{d}s\\
&+\left(2(C+1)+\frac{1}{2(C+1)}\right)\int_t^T G(s,\mathbb{E}\|X_s^{n-1}-X_s^{m-1}\|^2)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\|X_t^n-X_t^m\|^2\\
\leqslant\;& \mathrm{e}^{2(C+1)T}\left(2(C+1)+\frac{1}{2(C+1)}\right)\int_t^T G(s,\mathbb{E}\|X_s^{n-1}-X_s^{m-1}\|^2)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

令

$$Z_t=\varlimsup_{m,n\to\infty}\sup_{t\leqslant r\leqslant T}\mathbb{E}\|X_r^m-X_r^n\|^2,$$

由 (1.40) 式，(2a) 和 Fatou 引理易得

$$Z_t\leqslant K\int_t^T G(s,Z_s)\,\mathrm{d}s.$$

用 (2c) 立得 $Z\equiv 0$, 故有

$$\lim_{m,n\to\infty}\sup_{t\leqslant r\leqslant T}\mathbb{E}\|X_r^m-X_r^n\|^2=0, \tag{1.42}$$

因此，我们有

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T \|X_s^n-X_s^m\|^2\,\mathrm{d}s = 0, \tag{1.43}$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T \|Y_s^n-Y_s^m\|_{\mathcal{L}_2}^2\,\mathrm{d}s = 0. \tag{1.44}$$

(1.43) 式和 (1.44) 式说明 $\{X^n,n\in\mathbb{N}\}$ 和 $\{Y^n,n\in\mathbb{N}\}$ 分别为 $\mathcal{L}^2([0,T],H)$ 和 $\mathcal{L}^2([0,T],\mathcal{L}_2)$ 中的 Cauchy 列，故其极限过程存在，分别设为 X 和 Y. 在 (1.39) 式中令 $n\to\infty$, X^n 和 Y^n 分别取 $\mathcal{L}^2([0,T],H)$ 和 $\mathcal{L}^2([0,T],\mathcal{L}_2)$ 中的极限，易证 $\forall t\in[0,T]$, (X,Y) 满足方程 (1.36), 即我们已证明方程 (1.36) 的解的存在性.

若 (X,Y) 和 (X',Y') 为方程 (1.36) 的两个解，同上可得 $\forall t\in[0,T]$, 有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\|X_t-X_t'\|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T\|Y_s-Y_s'\|^2_{\mathcal{L}_2}\,\mathrm{d}s\\ \leqslant\ &2(C+1)\mathbb{E}\int_t^T\|X_s-X_s'\|^2\,\mathrm{d}s\\ &+\left(2(C+1)+\frac{1}{2(C+1)}\right)\int_t^T G(s,\mathbb{E}\|X_s-X_s'\|^2)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\|X_t-X_t'\|^2\\ \leqslant\ &\mathrm{e}^{2(C+1)T}\left(2(C+1)+\frac{1}{2(C+1)}\right)\int_t^T G(s,\mathbb{E}\|X_s-X_s'\|^2)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|X_t-X_t'\|^2&=0,\\ \mathbb{E}\int_0^T\|X_s-X_s'\|^2\,\mathrm{d}s&=0,\\ \mathbb{E}\int_0^T\|Y_s-Y_s'\|^2_{\mathcal{L}_2}\,\mathrm{d}s&=0,\end{aligned}$$

这样我们证明了方程 (1.36) 的解的唯一性．显然， $\mathbb{E}\|X_t\|^2\leqslant u_t$, $\mathbb{E}\int_t^T\|Y_s\|^2_{\mathcal{L}_2}\,\mathrm{d}s\leqslant 2\left(2(C+1)T+\mathrm{e}^{-2(C+1)T}\right)u_t$. 证毕. □

注 1.48 设 $G(t,u)=\lambda(t)\gamma(u)$, 其中 λ 为非负函数, 且满足 $\int_0^T\lambda(s)\,\mathrm{d}s<+\infty$, $\gamma:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 为连续增函数， $\gamma(0)=0$ 且满足 $\displaystyle\int_{0^+}\frac{1}{\gamma(u)}\,\mathrm{d}u=+\infty$. 由 Bihari 不等式 可知， G 满足定理 1.47 中的 (2c). 若再设 $\gamma(u)$ 或 $\dfrac{\gamma(u)^2}{u}$ 为凹函数， σ,b 满足 $\sigma(t,\omega,0)\in\mathcal{L}^2([0,T],\mathcal{L}_2)$, $b(t,\omega,0,0)\in\mathcal{L}^2([0,T],H)$, 且 $\forall t\in[0,T]$, $X,X'\in H$, $Y,Y'\in\mathcal{L}_2$, 有

$$\|\sigma(t,X)-\sigma(t,X')\|^2_{\mathcal{L}_2}\leqslant\lambda(t)\gamma(\|X-X'\|^2)\quad\text{a.s.},\tag{1.45}$$

$$\|b(t,X,Y)-b(t,X',Y')\|^2\leqslant\lambda(t)\gamma(\|X-X'\|^2)+C\|Y-Y'\|^2_{\mathcal{L}_2}\quad\text{a.s.},\tag{1.46}$$

则 σ,b 满足定理 1.47 中的 (1a)-(1c) 和 (2a)-(2c), 其中

$$H(t,u)=2\left(2G(t,u)+\mathbb{E}\|\sigma(t,0)\|^2_{\mathcal{L}_2}+\mathbb{E}\|b(t,0,0)\|^2\right).$$

故我们的结果为 Zhou-Cao(参看 [14]) 和 Mao(参看 [12]) 的结果的推广.

注 1.49 设 $\gamma(u)=\sum\limits_{i=1}^k\rho_i^2(u^{\frac{1}{2}})$, 其中 ρ_i 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数，满足 $\rho_i(0)=0$ 且 $\displaystyle\int_{0^+}\frac{u}{\sum\limits_{i=1}^k\rho_i^2(u)}\,\mathrm{d}u=+\infty$. 由引理 1.41(2), γ 满足注 1.48 中的条件.

1.5 Banach 空间上的随机分析简介

以下内容可参看 Neidhardt [9] 和 Brzezniak-Carroll [10].

设 E 为一 $M-2$ 型实可分 Banach 空间，即存在常数 $C(E)>0$, 满足对任意 E 值鞅 M 成立如下不等式：

$$\sup_k \mathbb{E}\left(\|M_k\|^2\right) \leqslant C(E)\sum_k \mathbb{E}\left(\|M_k-M_{k-1}\|^2\right). \tag{1.47}$$

例如 $\mathcal{L}^p(\Omega)(p\geqslant 2)$, 以及所有的 Hilbert 空间均为 $M-2$ 型 Banach 空间. 可以证明，E 为 $M-2$ 型 Banach 空间等价于 E 为 2 一致光滑空间，即存在常数 $C'(E)>0$, 满足 $\forall x,y\in E$,

$$\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right) \leqslant \|x\|^2 + C'(E)\|y\|^2. \tag{1.48}$$

设 K 为一实可分 Hilbert 空间，令

$$\mathcal{R}=\mathcal{R}(K,E)=\left\{L\in\mathcal{L}(K,E): L\text{为}\gamma-\text{柱测度算子}\right\}.$$

其中 γ 为 K 上标准有限可加 Gauss 测度， L 为 γ- 柱测度算子表示 $\nu_L=\gamma\circ L^{-1}$ 在 E 的柱集生成的代数上 $\mathcal{R}(E)$ 是 σ 可加的，即 ν_L 为 E 上的柱测度. 因此 ν_L 可以扩张成为 $\mathcal{B}(E)=\sigma(\mathcal{R}(E))$ 上的 Gauss 测度，即 $\forall f\in E^*$, $f(\cdot)$ 为 $(E,\mathcal{B}(E),\nu_L)$ 上的零均值 Gauss 随机变量，其协方差算子为 LL^*.

$\forall L\in\mathcal{R}$, 我们令

$$\|L\|_{\mathcal{R}}=\left(\int_E \|x\|^2\,\mathrm{d}\nu_L(x)\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $\mathcal{R}$ 依如上范数为可分 Banach 空间.

设 F 为另一实可分 Banach 空间，我们称 $J:K\mapsto F$ 为一抽象 Wiener 空间，若 J 为单射，且 $J\in\mathcal{R}(K,F)$. 令 $\mu=\nu_J=\gamma\circ J^{-1}$, 设 W 为某概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 F 值 Brown 运动，即

(1) $W_0=0$ a.s.,

(2) $\dfrac{W_t-W_s}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}$ 的分布为 μ,

(3) W 为独立增量过程.

可以证明，如下映射

$$\mathcal{L}(F,E)\ni L\mapsto LJ\in\mathcal{R}.$$

连续，故可认为 $\mathcal{L}(F,E)\subset\mathcal{R}$.

记 $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})=\left\{\sigma:\mathbb{R}_+\times\Omega\mapsto\mathcal{R}\middle|\sigma\text{为可测适应 }\mathcal{R}\text{ 值过程}, \forall t, \int_0^t\mathbb{E}\|\sigma_s\|_{\mathcal{R}}^2\,\mathrm{d}s<+\infty\right\}$.

在文献 [10] 中， Brzezniak-Carroll 定义了关于 W 的随机积分，并给出如下的性质与 Burkholder-Davis-Gundy 不等式：

命题 1.50 若 $\sigma\in\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$, 则 $M_t=\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}W_s\in\mathcal{M}_c^2(E)$, 且满足

$$\mathbb{E}\left(\|M_t\|^2\right)\leqslant C(E)\mathbb{E}\left(\int_0^t\|\sigma_s\|_{\mathcal{R}}^2\,\mathrm{d}s\right),\qquad \forall t\in\mathbb{R}_+. \tag{1.49}$$

命题 1.51 (Burkholder-Davis-Gundy 不等式) 若 $p\geqslant 2$, $\sigma\in\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$, 则存在常数 $C_p>0$, 使得 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leqslant t}\left\|\int_0^s\sigma_u\,\mathrm{d}W_u\right\|^p\right)\leqslant C_p\mathbb{E}\left(\int_0^t\|\sigma_s\|_{\mathcal{R}}^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{1.50}$$

注 1.52 若 $E=H$ 为一 Hilbert 空间, 则 (1.47) 及 (1.49) 均为等式, 且有 $C(H)=C'(H)=1$, $F=K$, $Q=I$, 以及

$$\begin{aligned} J:K &\mapsto K\\ \delta_k &\mapsto \lambda_k\delta_k, \end{aligned}$$

其中 $\lambda_k>0$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2<+\infty$, $\{\delta_k,k\in\mathbb{N}\}$ 为 K 上的一列标准正交基， $\mu=\mathcal{N}(0,JJ^*)$, $\mathcal{R}=\mathcal{L}_2^0=\mathcal{L}_2(K,H)$, $\|L\|_{\mathcal{R}}=\|L\|_{\mathcal{L}_2^0}$ 且 $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})=\mathcal{L}^2(\mathcal{L}_2^0)$.

1.6 Banach 空间上的随机微分方程

我们用 $\mathcal{C}(E)=\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,E)$ 表示从 $\mathbb{R}_+$ 到 E 的连续映射全体. 令 $\mathcal{B}_t(\mathcal{C}(E))=\sigma(X_s,s\leqslant t,X\in\mathcal{C}(E))$, $\mathcal{B}(\mathcal{C}(E))=\mathcal{B}_\infty(\mathcal{C}(E))$, $\mathcal{G}_t=\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}_t(\mathcal{C}(E))$ 以及

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}^p(\mathcal{C}(E))=\left\{X:\Omega\mapsto\mathcal{C}(E)\middle|X\in\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathcal{C}(E)),\forall t,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r\|^p\right)<+\infty\right\}.$$

考虑如下的 E 值非 Markov 型随机微分方程：

$$X_t=X_0+\int_0^t\sigma(s,X)\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t b(s,X)\,\mathrm{d}s. \tag{1.51}$$

其中

(B1) $X_0:\Omega\to E$, 满足 $X_0\in\mathcal{F}_0/\mathcal{B}(E)$, 且存在 $p\geqslant 2$, 使 $\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right)<+\infty$.

(B2) $\sigma:\mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathcal{C}(E)\mapsto\mathcal{R}$, 满足 $\sigma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathcal{C}(E))/\mathcal{B}(\mathcal{R})$, 且 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\sigma(t,\cdot,\cdot):\Omega\times\mathcal{C}(E)\mapsto\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{G}_t/\mathcal{B}(\mathcal{R})$ 可测.

(B3) $b:\mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathcal{C}(E)\mapsto E$, 满足 $b\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathcal{C}(E))/\mathcal{B}(E)$, 且 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $b(t,\cdot,\cdot):\Omega\times\mathcal{C}(E)\mapsto E$ 为 $\mathcal{G}_t/\mathcal{B}(E)$ 可测.

在文献 [10] 中， Brzezniak-Carroll 给出了如下的命题：

命题 1.53 若方程 (1.51) 的系数 σ 和 b 满足局部 lipschitz 条件和线性增长条件，则此方程的解存在且满足轨道唯一性.

仿照 1.3 节，我们可以证明本节的主要定理：

定理 1.54 设

(1) 存在函数 $H(t,u):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足：

(1a) $H(t,u)$ 对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 关于 t 局部可积，对固定的 $t\in\mathbb{R}_+$ 关于 u 为连续增函数,

(1b) $\forall t>0$, $X\in\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{C}(E))$ 有

$$\mathbb{E}\left(\|\sigma(t,X)\|^p_{\mathcal{R}}\right)+\mathbb{E}\left(\|b(t,X)\|^p\right)\leqslant H\left(t,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r\|^p\right)\right),$$

(1c) $\forall K>0$ 及初值 $u_0\geqslant 3^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right)$, 方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=KH(t,u)$$

有全局解.

(2) 存在函数 $G(t,u):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 满足：

(2a) $G(t,u)$ 对固定的 $u\in\mathbb{R}_+$ 关于 t 局部可积，对固定的 $t\in\mathbb{R}_+$ 关于 u 为连续增函数，且 $G(t,0)=0$,

(2b) $\forall t>0$, $X,Y\in\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{C}(E))$ 有

$$\mathbb{E}\left(\|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\|^p_{\mathcal{R}}\right)+\mathbb{E}\left(\|b(t,X)-b(t,Y)\|^p\right)\leqslant G\left(t,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r-Y_r\|^p\right)\right),$$

(2c) $\forall K>0$, 若 $\mathbb{R}_+$ 上的非负函数 Z 满足 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$Z_t\leqslant K\int_0^t G(s,Z_s)\,\mathrm{d}s,$$

可得 $Z\equiv 0$.

则方程 (1.51) 的解存在且满足轨道唯一性.

证明. 考虑如下的逐次逼近：

$$\begin{cases} X_t^0 &= X_0, \\ X_t^n &= X_0 + \int_0^t \sigma(s, X^{n-1})\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X^{n-1})\,\mathrm{d}s, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.52}$$

注意到 $X^0 = X_0 \in \mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{C}(E))$, 我们首先证明 $\forall n \in \mathbb{N}$, $X^n \in \mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{C}(E))$. 固定 $T > 0$, 考虑 $t \leqslant T$. 若对 $n \in \mathbb{N}$, $X^{n-1} \in \mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{C}(E))$, 由 (1a), (1b), Hölder 不等式， Burkholder-Davis-Gundy 不等式 (命题 1.51), 我们有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r^n\|^p\right) \\ \leqslant\ & 3^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right) + 3^{p-1}C_p T^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t \mathbb{E}\|\sigma(s, X^{n-1})\|^p_{\mathcal{R}}\,\mathrm{d}s \\ & +3^{p-1}T^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}\|b(s, X^{n-1})\|^p\,\mathrm{d}s \\ \leqslant\ & 3^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right) + 3^{p-1}\left(C_p T^{\frac{p}{2}-1} + T^{p-1}\right)\int_0^t H\left(s, \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|X_r^{n-1}\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s \\ =\ & 3^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right) + K\int_0^t H\left(s, \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|X_r^{n-1}\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

其中 $K = 3^{p-1}\left(C_p T^{\frac{p}{2}-1} + T^{p-1}\right)$. 由 (1c), 存在 u_t 满足

$$u_t = u_0 + K\int_0^t H(s, u_s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $u_0 \geqslant 3^{p-1}\mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right)$. 注意到 $\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r^0\|^p\right) = \mathbb{E}\left(\|X_0\|^p\right) \leqslant u_t$, 由归纳法可知，若 $\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r^{n-1}\|^p\right) \leqslant u_t$, 则

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r^n\|^p\right) \\ \leqslant\ & u_0 + K\int_0^t H(s, u_s)\,\mathrm{d}s \\ =\ & u_t. \end{aligned} \tag{1.53}$$

而且由于 $\sigma(\cdot, X^{n-1})$ 为可测适应 $\mathcal{R}$ 值过程，再次用 (1a) 和 (1b) 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^t \mathbb{E}\|\sigma(s, X^{n-1})\|^2_{\mathcal{R}}\,\mathrm{d}s \\ \leqslant\ & \left(\int_0^t \mathbb{E}\|\sigma(s, X^{n-1})\|^p_{\mathcal{R}}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{2}{p}} t^{\frac{p-2}{p}} \\ \leqslant\ & \left(\int_0^t H\left(s, \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|X_r^{n-1}\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{2}{p}} T^{\frac{p-2}{p}} \end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\int_0^t H(s,u_T)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{2}{p}} T^{\frac{p-2}{p}} < +\infty,$$

即

$$\sigma(\cdot, X^{n-1}) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R}).$$

由命题 1.50 可知 X^n 有定义，且 $X^n \in \mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{C}(E))$.

同理我们有

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X^m_r - X^n_r\|^p\right) \\
\leqslant\ & 2^{p-1}C_pT^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t \mathbb{E}\|\sigma(s,X^{m-1})-\sigma(s,X^{n-1})\|^p_{\mathcal{R}}\,\mathrm{d}s \\
& +2^{p-1}T^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}\|b(s,X^{m-1})-b(s,X^{n-1})\|^p\,\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & 2^{p-1}\left(C_pT^{\frac{p}{2}-1}+T^{p-1}\right)\int_0^t G\left(s,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|X^{m-1}_r - X^{n-1}_r\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & K\int_0^t G\left(s,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|X^{m-1}_r - X^{n-1}_r\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

令

$$Z_t = \overline{\lim_{m,n\to\infty}}\,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X^m_r - X^n_r\|^p\right),$$

由 (1.53) 式，(2a) 和 Fatou 引理易得

$$Z_t \leqslant K\int_0^t G(s,Z_s)\,\mathrm{d}s.$$

用 (2c) 立得 $Z\equiv 0$, 故有

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X^m_r - X^n_r\|^p\right) = 0. \tag{1.54}$$

我们用 $\mathcal{C}_T(E)$ 表示从 $[0,T]$ 到 E 的连续映射全体. $\forall X\in\mathcal{C}_T(E)$, 定义

$$\|X\|_{\mathcal{C}_T(E)} = \sup_{t\leqslant T}\|X_t\|.$$

则 $(\mathcal{C}_T(E), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_T(E)})$ 为 Banach 空间，故 $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{C}_T(E))$ 也为 Banach 空间. 又 (1.54) 式说明 $\{X^n, n\in\mathbb{N}\}$ 为 $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{C}_T(E))$ 中的 Cauchy 列，故其极限过程存在，设为 X. 由 X^n 的连续性可知 X 是 E 值连续半鞅. 在 (1.52) 式中令 $n\to\infty$, 取 $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{C}_T(E))$ 中的极限，易证 $\forall t\leqslant T$, X 满足方程 (1.51), 即我们已证明方程 (1.51) 的解的存在性.

若 X 和 X' 为方程 (1.51) 的两个解，同上可得 $\forall t\leqslant T$, 有

$$\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r - X'_r\|^p\right)\leqslant K\int_0^t G\left(s, \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}\|X_r - X'_r\|^p\right)\right)\,\mathrm{d}s,$$

和

$$\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r - X'_r\|^p\right)\equiv 0,$$

这样我们证明了方程 (1.51) 的解的唯一性. 显然， $X\in\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{C}(E))$, 且满足 $\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}\|X_r\|^p\right)\leqslant u_t$. 证毕. □

2 由无穷个 Brown 运动驱动的随机微分方程

2.1 关于无穷个 Brown 运动的随机积分

沿用 1.1 节和 1.3 节中的记号. 令 $\{W^j, j=1,2,\cdots\}$ 为某概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 运动，它们可以看成 Hilbert 空间 $K=l^2$ 值柱 I-Brown 运动 $W=(W^1,W^2,\cdots)$.

为了说明 W 的存在性，我们可以构造概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 如下：

设 $\mathcal{W}^m=\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{W}_0^m=\{\omega\in\mathcal{W}^m:\omega_0=0\}$, μ^m 表示 $\mathcal{W}_0^m$ 上的 Wiener 测度. 注意到 $\mathcal{W}^m$ 和 $\mathcal{W}_0^m$ 均为可分 Fréchet 空间，其准范为：

$$\|\omega\|=\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant j}|\omega_t|\wedge 1\right),$$

则 $\mathcal{W}^\infty=\prod\limits_{j=1}^{\infty}\mathcal{W}^1$ 及 $\Omega=\mathcal{W}_0^\infty=\prod\limits_{j=1}^{\infty}\mathcal{W}_0^1$ 为 Polish 空间，其度量为：

$$d(\omega,\omega')=\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\left(\|\omega^j-\omega'^j\|\wedge 1\right).$$

令 $\mathbb{P}=\mu^\infty=\prod\limits_{j=1}^{\infty}\mu^1$, $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)=\sigma(\omega_s,s\leqslant t,\omega\in\mathcal{W}^m)$ 以及 $\mathcal{B}(\mathcal{W}^m)=\mathcal{B}_\infty(\mathcal{W}^m)$. $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^m)$, $\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^m)$, $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^\infty)$, $\mathcal{B}(\mathcal{W}^\infty)$, $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)$ 和 $\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)$ 可做类似定义，并将 $\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)$ 完备化成 $\mathcal{F}$, 以及将 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)$ 通常化成 $\mathcal{F}_t$. 定义从 $\mathcal{W}_0^\infty$ 到第 j 个坐标空间的投影如下：

$$W^j: W^j(\omega)=\omega^j\in\mathcal{W}_0,$$

则 $\{W^j,j=1,2,\cdots\}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 运动.

定义 2.1 设 $W=(W^1,W^2,\cdots)$, 其中 $\mathcal{F}_t$- 适应过程列 $\{W^j,j=1,2,\cdots\}$ 为无穷个相互独立的实值 Brown 运动，若 $\forall 0\leqslant s<t$, W_t-W_s 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，则称 W 为无穷个相互独立的 $\mathcal{F}_t$-Brown 运动.

由有限维 Brown 运动的 Levy 鞅刻画定理，易证如下命题：

命题 2.2 (无穷维鞅刻画定理) 设 $\{W^j,j=1,2,\cdots\}$ 为无穷个连续 $\mathcal{F}_t$- 适应过程，$W_0^j=0$, 则以下命题等价：

(1)$\{W^j,j=1,2,\cdots\}$ 为无穷个相互独立的 $\mathcal{F}_t$-Brown 运动.

(2)W^j 为连续局部 $\mathcal{F}_t$- 鞅，且 $[W^j, W^k]_t = \delta_k^j t\ (j,k=1,2,\cdots)$.

(3)$\forall d\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{R}^d$, $Z_t^\alpha = \exp\left\{\mathrm{i}\sum\limits_{j=1}^{d}\alpha^j W_t^j + \frac{1}{2}|\alpha|^2 t\right\}$ 为 $\mathcal{F}_t$ 鞅.

由命题 2.2, 我们易证如下结果：

推论 2.3 (强再生性) 设 $W=(W^1, W^2, \cdots)$ 为无穷个相互独立的 $\mathcal{F}_t$-Brown 运动，令

$$(\theta_\tau W)_t = W_{\tau+t} - W_\tau, \tag{2.1}$$

且 $\mathcal{F}_t' = \overline{\sigma(W_{\tau+u}, u\leqslant t)}^{\mathbb{P}}$, 其中 τ 为 $\mathcal{F}_t$- 停时，则 $\theta_\tau W$ 为无穷个相互独立的 $\mathcal{F}_t'$-Brown 运动，且与 $\mathcal{F}_\tau$ 独立.

令第1章中 $H=\mathbb{R}^m$, 则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_t &= \mathcal{F}_t\times\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m),\\
\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{W}^m) &= \left\{X:\Omega\mapsto\mathcal{W}^m \middle| X\in\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathcal{W}^m), \forall t, \mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r|^p\right)<+\infty\right\},\\
\mathcal{L}_2^0 &= \mathbb{R}^m\otimes l^2 = \left\{\sigma=(\sigma_j^i): \|\sigma\|<+\infty, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots\right\},\\
\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m\otimes l^2) &= \Big\{\sigma:\mathbb{R}_+\times\Omega\mapsto\mathbb{R}^m\otimes l^2 \Big| \sigma \text{ 为可测适应 } \mathbb{R}^m\otimes l^2 \text{ 值过程},\\
&\qquad \forall t, \int_0^t \mathbb{E}\|\sigma_s\|^2\,\mathrm{d}s<+\infty\Big\},\\
\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m\otimes l^2) &= \Big\{\sigma:\mathbb{R}_+\times\Omega\mapsto\mathbb{R}^m\otimes l^2 \Big| \sigma \text{ 为可测适应 } \mathbb{R}^m\otimes l^2 \text{ 值过程},\\
&\qquad \forall t, \int_0^t \|\sigma_s\|^2\,\mathrm{d}s<+\infty \text{ a.s.}\Big\},
\end{aligned}$$

其中 $\|\sigma\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\sigma_j^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $(\sigma,\sigma') = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\sigma_j^i {\sigma'}_j^{\,i})$. 记 $a=\sigma\sigma^*\in\mathbb{R}^m\otimes\mathbb{R}^m$, $\|a\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{m}(a_l^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\sigma^i=(\sigma_1^i,\sigma_2^i,\cdots)\in l^2$, $\sigma_j=(\sigma_j^1,\sigma_j^2,\cdots,\sigma_j^m)'\in\mathbb{R}^m$, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots$, 则 $\|a\|\leqslant\|\sigma\|^2=\mathrm{tr}(a)$, $a_l^i=(\sigma^i,\sigma^l)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\sigma_j^i\sigma_j^l)$.

注 2.4 同有限维空间一样，我们可以假设可测适应 $\mathbb{R}^m\otimes l^2$ 值过程 $\sigma\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m\otimes l^2)$ 满足 $\sigma\in\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m\otimes l^2)$.

下面的有限维 Burkholder-Davis-Gundy 不等式来自于何声武 - 汪嘉冈 - 严加安 [27]:

命题 2.5 (Burkholder-Davis-Gundy 不等式) 若 $p\geqslant 1$, $M\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, 则存在常数 $C_p, \tilde{C}_p>0$, 使得 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$\tilde{C}_p\mathbb{E}[M]_t^{\frac{p}{2}}\leqslant\mathbb{E}\left(\sup_{s\leqslant t}|M_s|^p\right)\leqslant C_p\mathbb{E}[M]_t^{\frac{p}{2}}. \tag{2.2}$$

关于 W 的随机积分，可以证明下面的构造和 [7] 中的定义一致.

命题 2.6 设 $W=(W^1,W^2,\cdots)$ 为无穷个相互独立的 Brown 运动， $\sigma\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(l^2)$, 则 $M_t=\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}W_s$ 的可料平方变差过程为

$$[M]_t=\int_0^t\|\sigma_s\|^2\,\mathrm{d}s,\qquad (t\geqslant 0). \tag{2.3}$$

若 $\sigma'\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(l^2)$, $N_t=\int_0^t\sigma'_s\,\mathrm{d}W_s$, 则 M,N 的可料交互变差过程为

$$[M,N]_t=\int_0^t(\sigma_s,\sigma'_s)\,\mathrm{d}s,\qquad (t\geqslant 0). \tag{2.4}$$

证明. 只需证明 (2.3) 式. 首先设 $\sigma\in\mathcal{L}^2(l^2)$. 令

$$M^n_t=\sum_{j=1}^n\int_0^t(\sigma_j)_s\,\mathrm{d}W^j_s,$$

则有 $(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, 且 $M^n\in\mathcal{M}^2_c(\mathbb{R})$, 其可料平方变差过程为

$$[M^n]_t=\sum_{j=1}^n\int_0^t(\sigma_j)^2_s\,\mathrm{d}s.$$

由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式 (命题 2.5) 可得

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u\leqslant t}(M^n_u-M^m_u)^2\right)\leqslant C\sum_{j=m+1}^n\int_0^t\mathbb{E}(\sigma_j)^2_s\,\mathrm{d}s\to 0,\qquad (n>m,m,n\to\infty).$$

故

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u\leqslant t}(M^n_u-M_u)^2\right)\to 0,\qquad (n\to\infty),$$

$M\in\mathcal{M}^2_c(\mathbb{R})$, 且 $\forall t\geqslant 0$,

$$[M^n]_t\xrightarrow{\mathbb{P}}[M]_t,\qquad (n\to\infty).$$

因而

$$[M]_t=\int_0^t\|\sigma_s\|^2\,\mathrm{d}s.$$

若 $\sigma\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(l^2)$, 令

$$\tau_n=\inf\left\{t\geqslant 0:\int_0^t\|\sigma_s\|^2\,\mathrm{d}s\geqslant n\right\}\wedge n,$$

则 τ_n 为有界 $\mathcal{F}_t$- 停时，且 $\tau_n \uparrow \infty$ a.s.. 故

$$\|\sigma I_{[[0,\tau_n]]}\| \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),$$

因此

$$N_t^n = \int_0^t \sigma_s I_{\{s\leqslant\tau_n\}}\,\mathrm{d}W_s \in \mathcal{M}_c^2(\mathbb{R}).$$

显然 $\forall m\geqslant n$, $(N^m)^{\tau_n} = N^n$. 故 $M \in \mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, 且 $M^{\tau_n} = N^n$. 仿上可证 (2.3) 式. 证毕.

□

由此命题我们可以得到：

推论 2.7 在命题 2.6 的条件下,

(1) 若可测适应过程 f 满足 $f\|\sigma\|^2 \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, 则 $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^t f_s\,\mathrm{d}[M]_s \;=\; \int_0^t f_s\|\sigma_s\|^2\,\mathrm{d}s. \tag{2.5}$$

(2) 若可测适应过程 f 满足 $f\sigma \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(l^2)$, 则 $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^t f_s\,\mathrm{d}M_s \;=\; \int_0^t f_s\sigma_s\,\mathrm{d}W_s. \tag{2.6}$$

由命题 2.6 和推论 2.7, 我们可以对由无穷个 Brown 运动驱动的随机积分自由地运用有限维的 Itô 公式， Tanaka 公式以及 Burkholder-Davis-Gundy 不等式. 对 $\sigma \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m \otimes l^2)$, 我们还可定义 Fisk-Stratonovich 积分：

$$\begin{aligned}&\int_0^t \sigma_s \circ\,\mathrm{d}W_s\\ =\;& \int_0^t \sigma_s\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}[\sigma_j^1, W^j]_t, \sum_{j=1}^{\infty}[\sigma_j^2, W^j]_t, \cdots, \sum_{j=1}^{\infty}[\sigma_j^m, W^j]_t\right)'.\end{aligned} \tag{2.7}$$

下面的广义 Girsanov 定理和无穷维可料表示性定理来自于 Hitsuda-Watanabe [15]:

定理 2.8 (Girsanov 定理) 设 $0\leqslant t\leqslant T$, $\sigma \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(l^2)$, 且

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t \sigma_s\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_s\|^2\,\mathrm{d}s\right\}, \tag{2.8}$$

满足 $\mathbb{E}(Z_T) = 1$, 若令 $\mathbb{Q} = \int_\Omega Z_T\,\mathrm{d}\mathbb{P}$ 及

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \sigma_s\,\mathrm{d}s, \tag{2.9}$$

则有 $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{P}$, 且 $\tilde{W} = (\tilde{W}^1, \tilde{W}^2, \cdots)$ 在概率 $\mathbb{Q}$ 下为可列无穷个相互独立的 $\mathcal{F}_t$-Brown 运动.

定理 2.9 (可料表示性定理) 设 $W=(W^1,W^2,\cdots)$ 为无穷个相互独立的 $\mathcal{F}_t$-Brown 运动, 其中 $\mathcal{F}_t$ 为 W 生成的连续完备的自然 σ 代数流.

(1) 若 $M\in\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$(或$\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$), 则存在可料 l^2 值过程 $\sigma\in\mathcal{L}^2(l^2)$(或$\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(l^2)$), 使 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$M_t=M_0+\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}W_s,\qquad \text{a.s.}. \tag{2.10}$$

故 $M\in\mathcal{M}^2_c(\mathbb{R})$(或$\mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$).

(2) 设 $0<T<+\infty$, 若 $\xi\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P})$, 则存在可料 l^2 值过程 σ 满足

$$\int_0^T\mathbb{E}\|\sigma_s\|^2\,\mathrm{d}s<+\infty,$$

且

$$\xi=\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_0)+\int_0^T\sigma_s\,\mathrm{d}W_s,\qquad \text{a.s.}. \tag{2.11}$$

定义 2.10 我们称带流的概率空间 $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}};\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 的拓广, 如果存在映射 $\pi:\tilde\Omega\mapsto\Omega$ 为 $\tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{F}$ 可测, 且满足:

(1)$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\pi\in\tilde{\mathcal{F}}_t/\mathcal{F}_t$,

(2)$\mathbb{P}=\tilde{\mathbb{P}}\circ\pi^{-1}$,

(3)$\forall\xi\in\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$\tilde{\mathbb{E}}(\xi(\pi\tilde\omega)|\tilde{\mathcal{F}}_t)=\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)(\pi\tilde\omega),\quad \tilde{\mathbb{P}}-a.s..$$

注 2.11 给定两带流的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$, $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}';\mathcal{F}'_t)$, 设

$$\tilde\Omega=\Omega\times\Omega',\tilde{\mathcal{F}}=\mathcal{F}\times\mathcal{F}',\tilde{\mathbb{P}}=\mathbb{P}\times\mathbb{P}',\mathcal{F}_t\times\{\Omega',\emptyset\}\subset\tilde{\mathcal{F}}_t\subset\mathcal{F}_t\times\mathcal{F}',$$

π 为 $\tilde\Omega$ 到 Ω 的投影, 则 $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}};\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 的拓广, 称为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 的标准拓广.

注 2.12 设 $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}};\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 的拓广. 若 M 为 $\mathcal{F}_t$- 鞅, 令 $\tilde M_t(\tilde\omega)=M_t(\pi\tilde\omega)$, 则 $\tilde M$ 为 $\tilde{\mathcal{F}}_t$- 鞅. 若 M 为连续局部 $\mathcal{F}_t$- 鞅, 则 $\tilde M$ 为连续局部 $\tilde{\mathcal{F}}_t$- 鞅, 且

$$[\tilde M]_t(\tilde\omega)=[M]_t(\pi\tilde\omega).$$

下面是本节的主要定理: 连续局部鞅的无穷维随机积分表示定理. 它为 [7, 定理 8.2] 的特殊情形, 是证明定理 2.30 的关键, 我们将给出 $m=1$ 时的一个直接证明.

定理 2.13 (连续局部鞅的无穷维随机积分表示定理) 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件，$M\in\mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$, 且 $M_0=0$ a.s.. 若 $\exists\sigma\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m\otimes l^2)$, 使

$$[M^i,M^l]_t=\int_0^t (a_l^i)_s\,\mathrm{d}s,\qquad (i,l=1,2,\cdots,m),\tag{2.12}$$

其中 $a=\sigma\sigma^*$, 则存在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 的一个拓广 $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}};\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 及其上的无穷个相互独立的 $\tilde{\mathcal{F}}_t$-Brown 运动 $\tilde W=(\tilde W^1,\tilde W^2,\cdots)$, 使

$$M_t=\int_0^t \sigma_s\,\mathrm{d}\tilde W_s,\qquad \text{a.s.}.\tag{2.13}$$

证明. 只证明 $m=1$ 的情况．任给一完备带流的概率空间 $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}';\mathcal{F}'_t)$ 及其上的无穷个相互独立的 $\mathcal{F}'_t$-Brown 运动 $W'=(W'^1,W'^2,\cdots)$. 令 $\hat\Omega=\Omega\times\Omega'$, $\hat{\mathcal{F}}=\mathcal{F}\times\mathcal{F}'$, $\hat{\mathbb{P}}=\mathbb{P}\times\mathbb{P}'$, $\hat{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_t\times\mathcal{F}'_t$, 则 $(\hat\Omega,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mathbb{P}};\hat{\mathcal{F}}_t)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 的标准拓广．由注 2.11, 此时 M 和 $\{W'^j,j=1,2,\cdots\}$ 均可看成这个拓广空间上的连续局部鞅 (我们均略去符号 “$\sim$”), 且

$$\begin{cases}[M]_t=\int_0^t a_s\,\mathrm{d}s,\\ [M,W'^j]_t=0,\qquad (j=1,2,\cdots),\\ [W'^j,W'^k]_t=\delta_k^j t,\qquad (j,k=1,2,\cdots).\end{cases}$$

令

$$\begin{aligned}\hat W_t^1&=\int_0^t a_s^{-\frac12}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}M_s+\int_0^t I_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}W_s'^1,\\ \hat W_t^p&=W_t'^p,\qquad (p=2,3,\cdots),\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}[\hat W^1]_t&=\int_0^t a_s^{-1}I_{\{a_s\neq0\}}a_s\,\mathrm{d}s+\int_0^t I_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}s=t,\\ [\hat W^p,\hat W^q]_t&=[W'^p,W'^q]_t=\delta_q^p t,\qquad (p,q=2,3,\cdots),\\ [\hat W^1,\hat W^p]_t&=0,\qquad (p=2,3,\cdots).\end{aligned}$$

由命题 2.2, $\hat W=(\hat W^1,\hat W^2,\cdots)$ 为无穷个相互独立的 $\hat{\mathcal{F}}_t$-Brown 运动．另外

$$\begin{aligned}&\int_0^t a_s^{\frac12}\,\mathrm{d}\hat W_s^1\\ =&\int_0^t a_s^{\frac12}a_s^{-\frac12}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}M_s+\int_0^t a_s^{\frac12}I_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}W_s'^1\\ =&\int_0^t I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}M_s=M_t-\int_0^t I_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}M_s=M_t,\end{aligned}$$

其中最后一个等式成立是因为

$$\left[\int_0^\cdot I_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}M_s\right]_t=\int_0^t I_{\{a_s=0\}}a_s\,\mathrm{d}s=0.$$

再任给一完备带流的概率空间 $(\hat{\hat{\Omega}},\hat{\hat{\mathcal{F}}},\hat{\hat{\mathbb{P}}};\hat{\hat{\mathcal{F}}}_t)$ 及其上的无穷个相互独立的 $\hat{\hat{\mathcal{F}}}_t$-Brown 运动 $\hat{\hat{W}}=(\hat{\hat{W}}^1,\hat{\hat{W}}^2,\cdots)$. 令 $\tilde{\Omega}=\hat{\Omega}\times\hat{\hat{\Omega}}$, $\tilde{\mathcal{F}}=\hat{\mathcal{F}}\times\hat{\hat{\mathcal{F}}}$, $\tilde{\mathbb{P}}=\hat{\mathbb{P}}\times\hat{\hat{\mathbb{P}}}$, $\tilde{\mathcal{F}}_t=\hat{\mathcal{F}}_t\times\hat{\hat{\mathcal{F}}}_t$, 则 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}};\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 的标准拓广. 此时 M, $\{W'^j,j=1,2,\cdots\}$, $\{\hat{W}^j,j=1,2,\cdots\}$ 和 $\{\hat{\hat{W}}^j,j=1,2,\cdots\}$ 均可看成这个拓广空间上的连续局部鞅，且

$$\begin{cases}[\hat{W}^j,\hat{\hat{W}}^k]_t=0, & (j,k=1,2,\cdots),\\ [\hat{\hat{W}}^j,\hat{\hat{W}}^k]_t=\delta_k^j t, & (j,k=1,2,\cdots).\end{cases}$$

令

$$\tilde{W}_t^j=\int_0^t(\sigma_j)_s a_s^{-\frac{1}{2}}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}\hat{W}_s^1+\hat{\hat{W}}_t^j-\int_0^t(\sigma_j)_s\sigma_s a_s^{-1}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}\hat{\hat{W}}_s,\qquad(j=1,2,\cdots),$$

则有

$$\begin{aligned}[\tilde{W}^j,\tilde{W}^k]_t &= \int_0^t(\sigma_j)_s(\sigma_k)_s a_s^{-1}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}s+\delta_k^j t+\int_0^t(\sigma_j)_s(\sigma_k)_s\|\sigma_s\|^2a_s^{-2}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}s\\ &\quad -2\int_0^t(\sigma_j)_s(\sigma_k)_s a_s^{-1}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t(\sigma_j)_s(\sigma_k)_s a_s^{-1}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}s+\delta_k^j t+\int_0^t(\sigma_j)_s(\sigma_k)_s a_s^{-1}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}s\\ &\quad -2\int_0^t(\sigma_j)_s(\sigma_k)_s a_s^{-1}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}s=\delta_k^j t,\qquad(j,k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

由命题 2.2, $\tilde{W}=(\tilde{W}^1,\tilde{W}^2,\cdots)$ 为无穷个相互独立的 $\tilde{\mathcal{F}}_t$-Brown 运动. 注意到

$$\begin{aligned}\left[\int_0^\cdot a_s^{\frac{1}{2}}I_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}\hat{W}_s^1\right]_t &= \int_0^t a_sI_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}s=0,\\ \left[\int_0^\cdot \sigma_sI_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}\hat{\hat{W}}_s\right]_t &= \int_0^t\|\sigma_s\|^2I_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}s=\int_0^t a_sI_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}s=0,\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}\tilde{W}_s\\ =&\int_0^t\|\sigma_s\|^2a_s^{-\frac{1}{2}}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}\hat{W}_s^1+\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}\hat{\hat{W}}_s-\int_0^t\|\sigma_s\|^2\sigma_s a_s^{-1}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}\hat{\hat{W}}_s\\ =&\int_0^t a_s^{\frac{1}{2}}I_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}\hat{W}_s^1+\int_0^t\sigma_s\,\mathrm{d}\hat{\hat{W}}_s-\int_0^t\sigma_sI_{\{a_s\neq0\}}\,\mathrm{d}\hat{\hat{W}}_s\\ =&\int_0^t a_s^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\hat{W}_s^1-\int_0^t a_s^{\frac{1}{2}}I_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}\hat{W}_s^1+\int_0^t\sigma_sI_{\{a_s=0\}}\,\mathrm{d}\hat{\hat{W}}_s=M_t.\end{aligned}$$

证毕. □

2.2 解的存在唯一性

本节我们考虑如下 $\mathbb{R}^m$ 值非 Markov 型随机微分方程：

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X)\, \mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X)\, \mathrm{d}s, \tag{2.14}$$

其中 $W = (W^1, W^2, \cdots)$, $\{W^j, j = 1, 2, \cdots\}$ 为某完备带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 运动，且有

(C1) $x \in \mathbb{R}^m$.

(C2) $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{W}^m \mapsto \mathbb{R}^m \otimes l^2$, 满足 $\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathcal{W}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m \otimes l^2)$, 且 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\sigma(t, \cdot) : \mathcal{W}^m \mapsto \mathbb{R}^m \otimes l^2$ 为 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m \otimes l^2)$ 可测.

(C3) $b : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{W}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, 满足 $b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathcal{W}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, 且 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $b(t, \cdot) : \mathcal{W}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ 为 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测.

有时我们也讨论如下的非时齐 Markov 型方程：

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, \mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X_s)\, \mathrm{d}s, \tag{2.15}$$

其中

(C1′) $x \in \mathbb{R}^m$.

(C2′) $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m \otimes l^2$, 满足 $\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m \otimes l^2)$.

(C3′) $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, 满足 $b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

以及时齐 Markov 型方程：

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\, \mathrm{d}W_s + \int_0^t b(X_s)\, \mathrm{d}s, \tag{2.16}$$

其中

(C1″) $x \in \mathbb{R}^m$.

(C2″) $\sigma : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m \otimes l^2$, 满足 $\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m \otimes l^2)$.

(C3″) $b : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, 满足 $b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

在方程 (2.15) 中，设 $\partial_t \sigma = (\partial_t \sigma^i_j) \in \mathbb{R}^m \otimes l^2$ 表示 σ 对 t 求导， $\forall l = 1, 2, \cdots, m$, $\partial_l \sigma = (\partial_l \sigma^i_j) \in \mathbb{R}^m \otimes l^2$ 表示 σ 对 x^l 求导. 相应地有 $\partial_t \sigma^i \in l^2$ 和 $\partial_t \sigma_j \in \mathbb{R}^m$, $\partial_l \sigma^i \in l^2$ 和 $\partial_l \sigma_j \in \mathbb{R}^m$. 这样， (2.15) 式等价于如下 Fisk-Stratonovich 方程：

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ \mathrm{d}W_s + \int_0^t \tilde{b}(s, X_s)\, \mathrm{d}s, \tag{2.17}$$

其中 $\tilde{b}=b-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{m}\sigma_j^l\partial_l\sigma_j$.

在 [7] 中，作者定义了鞅问题解，弱解，温和解，强解的概念，但至今还没有唯一强解的概念. 在方程 (2.14) 的情形下，后三者等价. 下面我们仿照有限维的情形定义弱解，强解，唯一强解等概念，使得方程 (2.14) 解的有关结果可以做到与经典的随机微分方程的结果平行. 我们的弱解相当于 [7] 中的鞅问题解，我们的强解相当于 [7] 中的弱解.

定义 2.14 若存在完备带流的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 及其上的无穷个相互独立的 $\mathcal{F}_t$-Brown 运动 $W=(W^1,W^2,\cdots)$ 和 m 维连续适应过程 X, 满足

(1)$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\sigma(t,X)\in\mathcal{L}^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^m\otimes l^2)$, $b(t,X)\in\mathcal{L}^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^m)$,

(2)$\forall t\in\mathbb{R}_+$, 方程 (2.14) a.s. 成立,

则称 (X,W) 为方程 (2.14) 的初值为 x 的 (弱) 解.

定义 2.15 (1) 只要 (X,W), (X',W') 为方程 (2.14) 具有相同初值的解 (不一定定义在同一概率空间上), X 和 X' 就在 $\mathcal{W}^m$ 上具有相同的分布 (记为 $X\overset{d}{=}X'$), 即

$$\mathbb{P}\circ X^{-1}=\mathbb{P}\circ X'^{-1}, \tag{2.18}$$

则称方程 (2.14) 的解具有分布唯一性.

(2) 只要 (X,W), (X',W') 为方程 (2.14) 定义在同一概率空间上具有相同初值的解, X 和 X' 就无区别 (记为 $X=X'$), 即

$$\mathbb{P}(X_t=X'_t,\forall t\in\mathbb{R}_+)=1, \tag{2.19}$$

则称方程 (2.14) 的解具有轨道唯一性.

注 2.16 若 $X,X'\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, 则 $X=X'$ 等价于 X 和 X' 互为修正 (记为 $X\overset{\mathbb{P}}{=}X'$), 即

$$\mathbb{P}(X_t=X'_t)=1,\forall t\in\mathbb{R}_+. \tag{2.20}$$

定义 2.17 若存在函数 $\Phi:\mathbb{R}^m\times\mathcal{W}_0^\infty\mapsto\mathcal{W}^m$, 满足

(1)$\Phi\in\mathfrak{E}(\mathbb{R}^m\times\mathcal{W}_0^\infty)$, 即对任何 $\mathbb{R}^m$ 上的 Borel 概率测度 ν,

$$\Phi\in\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\times\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\nu\times\mu^\infty}/\mathcal{B}(\mathcal{W}^m),$$

(2)$\forall x\in\mathbb{R}^m$, $t\in\mathbb{R}_+$, $\Phi(x,\cdot):\mathcal{W}_0^\infty\mapsto\mathcal{W}^m$ 为 $\overline{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}/\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$ 可测,

且使得方程 (2.14) 的解 (X,W) 满足

$$X=\Phi(X_0,W)\qquad\text{a.s.},$$

则称 (X,W) 为方程 (2.14) 的强解.

定义 2.18 若存在上述函数 Φ, 满足

(1)$\forall x \in \mathbb{R}^m$ 及某完备带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$ 上的无穷个相互独立的 $\mathcal{F}_t$-Brown 运动 $W = (W^1, W^2, \cdots)$, $X = \Phi(x, W)$ 是方程 (2.14) 在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的初值为 x 的解,

(2) 对方程 (2.14) 的任一个解 (X, W), 有 $X = \Phi(X_0, W)$ a.s.,

则称方程 (2.14) 有唯一强解.

显然，若方程 (2.14) 有唯一强解，则其解具有轨道唯一性和分布唯一性.

下面的定理是有限维情况 (参看 Ikeda-Watanabe [25] 和黄志远 [31]) 的推广：

定理 2.19 方程 (2.14) 有唯一强解等价于它存在一个弱解且其解具有轨道唯一性.

证明. 必要性显然. 往证充分性. 设 (X, W), (X', W') 为方程 (2.14) 具有相同初值 $x \in \mathbb{R}^m$ 的两个解，分别定义在完备带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$ 和 $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}'; \mathcal{F}'_t)$ 上. 它们在 $\mathbb{R}^m \times \mathcal{W}_0^\infty$ 中的分布分别为 $\mathbb{P}_x = \mathbb{P} \circ (X, W)^{-1}$ 及 $\mathbb{P}'_x = \mathbb{P} \circ (X', W')^{-1}$. 记 π 为 $\mathcal{W}^m \times \mathcal{W}_0^\infty$ 到 $\mathcal{W}_0^\infty$ 的投影，则 $\mathbb{P}_x \circ \pi^{-1} = \mathbb{P} \circ W^{-1} = \mu^\infty$, $\mathbb{P}'_x \circ \pi^{-1} = \mathbb{P}' \circ W'^{\,-1} = \mu^\infty$.

考虑 $(\mathcal{W}^m \times \mathcal{W}_0^\infty, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m) \times \overline{\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}, \mathbb{P}_x)$. 记 $\mathbb{Q}_x(\omega, A)$ 是给定 $\pi = \omega$ 的正则条件概率 $\mathbb{P}_x(A \times \mathcal{W}_0^\infty | \pi = \omega)$, 即

(1) $\forall \omega \in \mathcal{W}_0^\infty$, $\mathbb{Q}_x(\omega, \cdot)$ 为 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上的概率测度,

(2) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$, $\mathbb{Q}_x(\cdot, A) \in \overline{\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$,

(3) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$, $\forall B \in \overline{\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$, 有

$$\int_B \mathbb{Q}_x(\omega, A)\mu^\infty(\,\mathrm{d}\omega) = \mathbb{P}_x(A \times B).$$

下证

$(\tilde{2})$ $\forall A \in \mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$, $\mathbb{Q}_x(\cdot, A) \in \overline{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$.

记

$$\begin{aligned} \pi_t : \mathcal{W}^m \times \mathcal{W}_0^\infty &\mapsto (\mathcal{W}_0^\infty, \overline{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}) \\ (\omega^1, \omega) &\mapsto \omega_{\cdot \wedge t}\ . \end{aligned}$$

记 $\mathbb{Q}_{x,t}(\omega, A)$ 是给定 $\pi_t = \omega$ 的正则条件概率 $\mathbb{P}_x(A \times \mathcal{W}_0^\infty | \pi_t = \omega)$, 即

$(1')$ $\forall \omega \in \mathcal{W}_0^\infty$, $\mathbb{Q}_{x,t}(\omega, \cdot)$ 为 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上的概率测度,

$(2')$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$, $\mathbb{Q}_{x,t}(\cdot, A) \in \overline{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$,

(3′) $\forall A\in\mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$, $\forall B\in\overline{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$, 有

$$\int_B \mathbb{Q}_{x,t}(\omega,A)\mu^\infty(\,\mathrm{d}\omega)=\mathbb{P}_x(A\times B).$$

由 (2′), 要证 ($\tilde{2}$), 只需证 $\forall A\in\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$, $\mathbb{Q}_x(\cdot,A)=\mathbb{Q}_{x,t}(\cdot,A)$, μ^∞ a.s.. 由 (3) 和 (3′), 又只需证 (3′) 对 $\forall A\in\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$, $\forall B\in\overline{\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$ 成立 (因为此时 $\int_B\mathbb{Q}_x(\omega,A)\mu^\infty(\,\mathrm{d}\omega)$ $=\mathbb{P}_x(A\times B)=\int_B\mathbb{Q}_{x,t}(\omega,A)\mu^\infty(\,\mathrm{d}\omega)$).

事实上，定义 $\mathcal{W}_0^\infty$ 上的变换

$$(\rho_t\omega)_\cdot=\omega_{\cdot\wedge t},\ (\theta_t\omega)_\cdot=\omega_{\cdot+t}-\omega_t,$$

则 $\theta_t\in\overline{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}/\overline{\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$, 且 $\forall s\geqslant 0$, $(\theta_t\omega)_s$ 与 $\overline{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$ 独立 (关于概率 μ^∞). 不妨设 $B=\{\omega\in\mathcal{W}_0^\infty:\rho_t\omega\in B_1,\theta_t\omega\in B_2,B_1,B_2\in\overline{\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}\}$(由单调类定理可证一般的 $B\in\overline{\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$), 则有

$$\begin{aligned}
&\int_B \mathbb{Q}_{x,t}(\omega,A)\mu^\infty(\,\mathrm{d}\omega)\\
=&\int_{\{\rho_t\omega\in B_1\}}\mathbb{Q}_{x,t}(\omega,A)\mu^\infty(\,\mathrm{d}\omega)\cdot\mu^\infty(\theta_t\omega\in B_2)\\
=&\ \mathbb{P}_x(A\times\{\rho_t\omega\in B_1\})\mathbb{P}_x(\mathcal{W}^m\times\{\theta_t\omega\in B_2\})\\
=&\ \mathbb{P}(X\in A,\rho_tW\in B_1)\mathbb{P}(\theta_tW\in B_2)\\
=&\ \mathbb{P}(X\in A,\rho_tW\in B_1,\theta_tW\in B_2)\\
=&\ \mathbb{P}(X\in A,W\in B)\\
=&\ \mathbb{P}_x(A\times B).
\end{aligned}$$

同理考虑 $(\mathcal{W}^m\times\mathcal{W}_0^\infty,\mathcal{B}(\mathcal{W}^m)\times\overline{\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty},\mathbb{P}'_x)$, 记 $\mathbb{Q}'_x(\omega,A')$ 是给定 $\pi=\omega$ 的正则条件概率 $\mathbb{P}'_x(A'\times\mathcal{W}_0^\infty|\pi=\omega)$. 令 $\tilde{\Omega}=\mathcal{W}^m\times\mathcal{W}^m\times\mathcal{W}_0^\infty$, $\tilde{\mathbb{Q}}_x(\,\mathrm{d}\omega^1,\,\mathrm{d}\omega^2,\,\mathrm{d}\omega)=\mathbb{Q}_x(\omega,\,\mathrm{d}\omega^1)\mathbb{Q}'_x(\omega,\,\mathrm{d}\omega^2)\mu^\infty(\,\mathrm{d}\omega)$. 定义 $\tilde{\mathcal{F}}=\overline{\mathcal{B}(\tilde{\Omega})}^{\tilde{\mathbb{Q}}_x}$, $\tilde{\mathcal{F}}_t$ 为 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)\times\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)\times\overline{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$ 在 $\tilde{\mathbb{Q}}_x$ 下的通常化，则我们有概率空间 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{Q}}_x;\tilde{\mathcal{F}}_t)$. 在此空间上，$(\omega^1,\omega)$ 及 (ω^2,ω) 在 $\tilde{\mathbb{Q}}_x$ 下的分布为 $\mathbb{P}_x$ 及 $\mathbb{P}'_x$, 即与 (X,W) 及 (X',W') 同分布，且 ω 在 $\tilde{\mathbb{Q}}_x$ 下的分布为 μ^∞.

我们还可以证明 ω 为 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{Q}}_x;\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 上的无穷个相互独立的 $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -Brown 运动. 事实上，只需证明 $\forall s<t$, $\omega_t-\omega_s$ 与 $\tilde{\mathcal{F}}_s$ 独立 (关于 $\tilde{\mathbb{Q}}_x$), 又只需证 $\omega_t-\omega_s$ 的任意有限个分量与 $\tilde{\mathcal{F}}_s$ 独立 (关于 $\tilde{\mathbb{Q}}_x$). 设 $A\in\mathcal{B}_s(\mathcal{W}^m)$, $A'\in\mathcal{B}_s(\mathcal{W}^m)$, $B\in\overline{\mathcal{B}_s(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$, $\alpha\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}_x}\left(I_{A\times A'\times B}(\omega^1,\omega^2,\omega)\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^n\alpha_j(\omega_t^j-\omega_s^j)\right)\right)\\
=&\int_B\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^n\alpha_j(\omega_t^j-\omega_s^j)\right)\mathbb{Q}_x(\omega,A)\mathbb{Q}'_x(\omega,A')\mu^\infty(\,\mathrm{d}\omega).
\end{aligned}$$

由刚才所证， $\mathbb{Q}_x(\cdot,A),\mathbb{Q}'_x(\cdot,A')\in\overline{\mathcal{B}_s(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$, $(\omega_t^1-\omega_s^1,\cdots,\omega_t^n-\omega_s^n)$ 与 $\overline{\mathcal{B}_s(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}$ 独立 (关于 μ^∞), 因此上式等于

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}_x}\left(\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^n\alpha_j(\omega_t^j-\omega_s^j)\right)\right)\int_B\mathbb{Q}_x(\omega,A)\mathbb{Q}'_x(\omega,A')\mu^\infty(\mathrm{d}\omega)\\ =\ &\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}_x}\left(\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^n\alpha_j(\omega_t^j-\omega_s^j)\right)\right)\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}_x}\left(I_{A\times A'\times B}(\omega^1,\omega^2,\omega)\right).\end{aligned}$$

由单调类定理可知 $(\omega_t^1-\omega_s^1,\cdots,\omega_t^n-\omega_s^n)$ 与 $\tilde{\mathcal{F}}_s$ 独立 (关于 $\tilde{\mathbb{Q}}_x$).

既然 (ω^1,ω) 和 (ω^2,ω) 为同一概率空间 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{Q}}_x;\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 上的方程 (2.14) 的两个解，由轨道唯一性可知 $\omega^1=\omega^2$ $\tilde{\mathbb{Q}}_x$ a.s., 此即

$$(\mathbb{Q}_x(\omega,\cdot)\times\mathbb{Q}'_x(\omega,\cdot))(\omega^1=\omega^2)=1,\quad \mu^\infty a.s..$$

容易看出，乘积测度若集中在 “对角线” 上，必然集中于某个唯一的单点 $\Phi(x,\omega)\in\mathcal{W}^m$, 即

$$\mathbb{Q}_x(\omega,\cdot)=\mathbb{Q}'_x(\omega,\cdot)=\delta_{\Phi(x,\omega)}(\cdot),\quad \mu^\infty a.s..$$

由 $(\tilde{2})$ 知， $\forall x\in\mathbb{R}^m$, $t\in\mathbb{R}_+$, $\Phi(x,\cdot)\in\overline{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty}/\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$. 实际上 $\mathbb{Q}_x(\omega,A)$ 是正则条件概率 $\mathbb{P}_x(A\times\mathcal{W}_0^\infty|\omega_0^1=x,\pi=\omega)(\mathbb{Q}'_x(\omega,A')$ 是正则条件概率 $\mathbb{P}'_x(A'\times\mathcal{W}_0^\infty|\omega_0^2=x,\pi=\omega))$, 因此， $\forall A\in\mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$, 对任何 $\mathbb{R}^m$ 上的 Borel 概率测度 ν, $\mathbb{Q}_\cdot(\cdot,A)\in\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\times\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\nu\times\mu^\infty}$, 故 $\Phi\in\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\times\mathcal{B}(\mathcal{W}_0^\infty)}^{\nu\times\mu^\infty}/\mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$. 又因为 $\mathbb{Q}_x(\omega,\{\omega^1:\omega^1=\Phi(x,\omega)\})=\mathbb{Q}'_x(\omega,\{\omega^2:\omega^2=\Phi(x,\omega)\})=1$, μ^∞ a.s., 于是 $\mathbb{P}_x(\{\omega^1:\omega^1=\Phi(x,\omega)\}\times\mathcal{W}_0^\infty|\pi=\omega)=1$, μ^∞ a.s., 故 $\mathbb{P}_x(\{\omega^1:\omega^1=\Phi(x,\omega)\}\times\mathcal{W}_0^\infty)=1$, 亦即 $\mathbb{P}_x(\{(\omega^1,\omega):\omega^1=\Phi(x,\omega)\})=1$. 因此 $\mathbb{P}(X=\Phi(x,W))=1$. 同理 $\mathbb{P}'(X'=\Phi(x,W'))=1$, 由 Φ 的唯一性知 (X,W) 为方程 (2.14) 的唯一强解. □

推论 2.20 方程 (2.14) 的解具有轨道唯一性则也具有分布唯一性.

定义 2.21 设 $\sigma:\mathbb{R}_+\times\mathcal{W}^m\mapsto\mathbb{R}^m\otimes l^2$, $b:\mathbb{R}_+\times\mathcal{W}^m\mapsto\mathbb{R}^m$,

(1) 若存在常数 $C>0$, 使 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $X,Y\in\mathcal{W}^m$, 有

$$\|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\|+|b(t,X)-b(t,Y)|\leqslant C\sup_{r\leqslant t}|X_r-Y_r|,\tag{2.21}$$

则称 σ 和 b 满足 Lipschitz 条件.

(2)$\forall R>0$, 若存在常数 $C_R>0$, 使 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $X,Y\in\mathcal{W}^m$ 满足 $\sup\limits_{r\leqslant t}|X_r|\leqslant R$, $\sup\limits_{r\leqslant t}|Y_r|\leqslant R$, 有

$$\|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\|+|b(t,X)-b(t,Y)|\leqslant C_R\sup_{r\leqslant t}|X_r-Y_r|,\tag{2.22}$$

则称 σ 和 b 满足局部 Lipschitz 条件.

(3) 若存在常数 $C>0$, 使 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $X\in\mathcal{W}^m$, 有

$$\|\sigma(t,X)\|+|b(t,X)|\leqslant C\left(1+\sup_{r\leqslant t}|X_r|\right), \tag{2.23}$$

则称 σ 和 b 满足线性增长条件.

仿照经典的有限维方程的结论，我们有：

命题 2.22 若方程 (2.16) 的系数 σ 和 b 满足 lipschitz 条件，则此方程有唯一强解. 记方程 (2.16) 的初值为 x 的强解为 $X(x,\cdot)$, 则

(1)$\forall p\geqslant 0$, $T>0$, 存在常数 $C_{p,T}>0$, 使 $\forall s,t\leqslant T$, $x,y\in\mathbb{R}^m$, 有

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leqslant T}|X(x,t)-X(y,t)|^p\right) \leqslant C_{p,T}|x-y|^p, \tag{2.24}$$

$$\mathbb{E}|X(x,t)-X(y,s)|^p \leqslant C_{p,T}\left(|x-y|^p+|t-s|^{p/2}\right). \tag{2.25}$$

(2)X 存在二元连续修正 $\tilde{X}(x,t)$, 且对 a.a. ω 和 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\tilde{X}(\cdot,t):\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^m$ 为同胚.

命题 2.23 若方程 (2.14) 的系数 σ 和 b 满足局部 lipschitz 条件和线性增长条件，则此方程有唯一强解.

命题 2.24 若方程 (2.16) 的系数 σ 和 b 满足线性增长条件， X 为方程 (2.16) 的解，则

(1)$\forall p\geqslant 0$, $T>0$, 存在常数 $C_{p,T}>0$, 使

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leqslant T}|X_t|^p\right)\leqslant C_{p,T}. \tag{2.26}$$

(2)$\forall p\geqslant 2$, $T>0$, 存在常数 $C_{p,T}>0$, 使 $\forall s,t\leqslant T$,

$$\mathbb{E}|X_t-X_s|^p\leqslant C_{p,T}|t-s|^{p/2}. \tag{2.27}$$

由定理 1.38 或定理 1.54 及注 1.42, 我们有如下定理：

定理 2.25 设 λ 为非负局部可积函数，ρ_1 和 ρ_2 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数,满足 $\rho_1(0)=\rho_2(0)=0$ 且 $\exists p\geqslant 2$, 使

$$\int_{0+}\frac{u^{p-1}}{\rho_1^p(u)+\rho_2^p(u)}\,\mathrm{d}u=+\infty. \tag{2.28}$$

若 $\|\sigma(t,0)\|$ 和 $|b(t,0)|\in\mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, 且 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $X,Y\in\mathcal{W}^m$, 有

$$\|\sigma(t,X)-\sigma(t,Y)\| \leqslant \sqrt[p]{\lambda(t)}\rho_1\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r-Y_r|\right), \tag{2.29}$$

$$|b(t,X)-b(t,Y)| \leqslant \sqrt[p]{\lambda(t)}\rho_2\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r-Y_r|\right), \tag{2.30}$$

则方程 (2.14) 有唯一强解.

注 2.26 若 (2.28) 式成立，则

$$\int_{0^+}\rho_1^{-p}(u)\,\mathrm{d}u=\int_{0^+}\rho_2^{-p}(u)\,\mathrm{d}u = +\infty. \tag{2.31}$$

引理 2.27 若 ρ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的凹函数，且满足 $\rho(0)=0$, 则存在常数 $C>0$, 使

$$\rho(u)\leqslant C(1+u). \tag{2.32}$$

注 2.28 在定理 2.25 的条件下，取 $Y=0$, 则 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $X\in\mathcal{W}^m$,

$$\|\sigma(t,X)\| \leqslant \|\sigma(t,0)\|+\sqrt[p]{\lambda(t)}\rho_1\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r|\right), \tag{2.33}$$

$$|b(t,X)| \leqslant |b(t,0)|+\sqrt[p]{\lambda(t)}\rho_2\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r|\right). \tag{2.34}$$

由引理 2.27, 存在 $\tilde{\lambda}_p$ 为非负局部可积函数，使

$$\|\sigma(t,X)\|+|b(t,X)|\leqslant\sqrt[p]{\tilde{\lambda}_p(t)}\left(1+\sup_{r\leqslant t}|X_r|\right). \tag{2.35}$$

由引理 1.41(2), 令 $\gamma(u)=\rho_1^p(u^{\frac{1}{p}})+\rho_2^p(u^{\frac{1}{p}})$, $G(t,u)=\lambda(t)\gamma(u)$, $H(t,u)=2^{p-1}(G(t,u)+\|\sigma(t,0)\|^p+|b(t,0)|^p)$ 或 $2^{p-1}\tilde{\lambda}_p(t)(1+u)$, 则 γ, G, H 满足注 1.40 中的条件.

注 2.29 考虑如下另一种逼近:

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_t^0 &=& x,\\ X_t^n &=& x+\sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^t\sigma_j(s,X^n)\,\mathrm{d}W_s^j+\int_0^t b(s,X^n)\,\mathrm{d}s, \qquad n\in\mathbb{N}. \end{array}\right. \tag{2.36}$$

显然，在定理 2.25 的条件下，方程 (2.36) 有唯一强解，且满足 $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{r\leqslant t}|X_r^n|^p\right)\leqslant u_t$. 同理可证 $\forall n>m$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r^m-X_r^n|^p\right)\\ \leqslant\ & 3^{p-1}\int_0^t\mathbb{E}\left(\sum_{j=m+1}^{n}|\sigma_j(s,X^n)|^2\right)\mathrm{d}s+K\int_0^t G\left(s,\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant s}|X_r^m-X_r^n|^p\right)\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

再若级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\sigma_j(t,X)|^2$ 一致收敛，则有

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r^m-X_r^n|^p\right)=0,$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\sup_{r\leqslant t}|X_r^n-X_r|^p\right)=0.$$

由定理 2.13 及标准的方法 (参看 Stroock-Varadhan [32]), 我们可以得到如下的三个结论.

定理 2.30 方程 (2.14) 的解的存在性等价于：存在某个完备带流的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_t)$ 及其上的 m 维连续适应过程 X, 使对一切 $f\in\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^m)$,

$$f(X_t)-f(x)-\int_0^t(Lf)(s,X)\,\mathrm{d}s\in\mathcal{M}_{c,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),$$

其中 $L=\sum\limits_{i=1}^m b^i\partial_i+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,l=1}^m a_l^i\partial_i\partial_l$.

推论 2.31 若方程 (2.14) 的系数 σ, b 为有界连续函数，则方程 (2.14) 的解存在.

命题 2.32 若方程 (2.16) 的系数 σ, b 连续且满足线性增长条件, 则方程 (2.16) 的解存在.

下面的定理来自于 Le Gall [33](或参看 [26, 34, 35]).

引理 2.33 设 ρ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的非负连续增函数，满足

$$\int_{0^+}\rho^{-2}(u)\,\mathrm{d}u=+\infty. \tag{2.37}$$

若连续半鞅 Y 满足 $\forall t\geqslant 0$ 有

$$\int_0^t\rho^{-2}(|Y_s|)I_{\{Y_s>0\}}\,\mathrm{d}[Y]_s<+\infty\qquad a.s., \tag{2.38}$$

则 Y 在 0 点的局部时 $L^0(Y)\equiv 0$.

定理 2.34 设 $m=1$, 方程 (2.16) 的系数 σ 和 b 有界，且满足

(1) 存在 $\mathbb{R}_+$ 上的连续增函数 ρ, 满足 $\rho(0)=0$ 及

$$\int_{0^+}\rho^{-2}(u)\,\mathrm{d}u=+\infty, \tag{2.39}$$

使 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 有

$$\|\sigma(x)-\sigma(y)\|\leqslant\rho(|x-y|), \tag{2.40}$$

(2) 存在 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数 γ, 满足 $\gamma(0)=0$ 及

$$\int_{0^+}\gamma^{-1}(u)\,\mathrm{d}u=+\infty, \tag{2.41}$$

使 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$|b(x)-b(y)|\leqslant\gamma(|x-y|), \tag{2.42}$$

则方程 (2.16) 有唯一强解.

证明. 显然， σ, b 为连续函数，由推论 2.31, 方程 (2.16) 的解存在. 下证唯一性. 若 X 和 X' 为方程 (2.16) 的两个解，令 $Y=X-X'$, 则 Y 为连续半鞅，且 $\forall t\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^t \rho^{-2}(|Y_s|)I_{\{Y_s>0\}}\,\mathrm{d}[Y]_s &= \int_0^t \rho^{-2}(|X_s-X_s'|)\|\sigma(X_s)-\sigma(X_s')\|^2 I_{\{Y_s>0\}}\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^t \rho^{-2}(|X_s-X_s'|)\rho^2(|X_s-X_s'|)\,\mathrm{d}s \\ &= t<+\infty.\end{aligned}$$

由引理 2.33, $L^0(Y)\equiv 0$. 由 Tanaka 公式，我们有

$$\begin{aligned}|X_t-X_t'| &= \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s-X_s')\,\mathrm{d}(X_s-X_s') \\ &= \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s-X_s')(\sigma(X_s)-\sigma(X_s'))\,\mathrm{d}W_s \\ &\quad +\int_0^t \mathrm{sgn}(X_s-X_s')(b(X_s)-b(X_s'))\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

注意到由于 σ 有界，上式第一项期望为 0, 故由 Jensen 不等式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t-X_t'| &= \int_0^t \mathbb{E}(\mathrm{sgn}(X_s-X_s')(b(X_s)-b(X_s'))\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^t \mathbb{E}|b(X_s)-b(X_s')|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^t \mathbb{E}(\gamma(|X_s-X_s'|))\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^t \gamma(\mathbb{E}|X_s-X_s'|)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由注 1.42 可知

$$\mathbb{E}|X_t-X_t'|\equiv 0.$$

这样我们证明了方程 (2.16) 的解的唯一性. 证毕. □

注 2.35 我们可取

$$\rho_1(u)=u^\alpha, \qquad \left(\alpha\geqslant\frac{1}{2}\right),$$

$$\rho_2(u)=\begin{cases}0 & (u=0)\\ (u\log\frac{1}{u})^{1/2} & (0<u\leqslant\delta)\\ (\delta\log\frac{1}{\delta})^{1/2} & (u>\delta)\end{cases},$$

$$\rho_3(u)=\begin{cases}0 & (u=0)\\ (u\log\frac{1}{u}\log\log\frac{1}{u})^{1/2} & (0<u\leqslant\delta)\\ (\delta\log\frac{1}{\delta}\log\log\frac{1}{\delta})^{1/2} & (u>\delta)\end{cases},$$

以及

$$\gamma_1(u)=u,$$

$$\gamma_2(u)=\begin{cases}0 & (u=0)\\ u\log\frac{1}{u} & (0<u\leqslant\delta)\\ \delta\log\frac{1}{\delta} & (u>\delta)\end{cases},$$

$$\gamma_3(u)=\begin{cases}0 & (u=0)\\ u\log\frac{1}{u}\log\log\frac{1}{u} & (0<u\leqslant\delta)\\ \delta\log\frac{1}{\delta}\log\log\frac{1}{\delta} & (u>\delta)\end{cases},$$

其中 $\delta\in(0,1)$ 充分小.

在此基础上，任佳刚 - 张希承 [16] 证明了如下的定理：

定理 2.36 设 $m=1$, 取

$$\rho(u)=\begin{cases}0 & (u=0)\\ u(\log\frac{1}{u})^{1/2} & (0<u\leqslant\delta)\\ u[(\log\frac{1}{\delta})^{1/2}-\frac{1}{2}(\log\frac{1}{\delta})^{-1/2}]+\frac{1}{2}\delta(\log\frac{1}{\delta})^{-1/2} & (u>\delta)\end{cases}, \tag{2.43}$$

其中 $\delta\in(0,1/\mathrm{e})$ 充分小. $\gamma(u)=ug(u)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数，其中 g 为 $\mathbb{R}_+$ 上的非负连续函数，且满足 $g(u)\geqslant 1$ 及

$$\lim_{u\downarrow 0}\frac{g(u)}{\log(u)}=0. \tag{2.44}$$

若 (2.40) 式和 (2.42) 式成立，则方程 (2.16) 有唯一强解. 记初值为 x 的强解为 $X(x,\cdot)$, 则 X 存在二元连续修正 $\tilde{X}(x,t)$, 满足 $\forall t>0$ 及

$$\beta<\frac{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-\frac{C}{2}t}}}{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-\frac{C}{2}t}}},$$

$\mathbb{R}\ni x\mapsto\tilde{X}(x,\cdot)\in\mathcal{C}([0,t])$ 为 β 阶 Hölder 连续函数，且对 a.a.ω 和 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\tilde{X}(\cdot,t):\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 为同胚.

2.3 解的性质

引理 2.37 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数，$(E_i, \varepsilon_i), i = 1, 2$ 为两可测空间，f 为 $E_1 \times E_2$ 上的有界 (或非负) 可测函数. 若 X 为与 $\mathcal{G}$ 独立的 E_1 值随机元，Y 为 $\mathcal{G}$ 可测 E_2 值随机元，则

$$\mathbb{E}(f(X, Y)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(X, y))|_{y=Y}. \tag{2.45}$$

定理 2.38 设方程 (2.16) 有唯一强解，记初值为 x 的强解为 $X(x, \cdot)$, 若系数 σ, b 为连续函数，则

$$X(x, \tau + t, \omega) = X(X(x, \tau, \omega), t, \theta_\tau \omega), \tag{2.46}$$

其中 τ 为 $\mathcal{F}_t$- 停时. 即 $X(x, \cdot)$ 为随机流.

证明. 由推论 2.3, 我们有

$$\begin{aligned} X(x, \tau + t, \omega) &= X(x, \tau, \omega) + \int_\tau^{\tau+t} \sigma(X(x, s, \omega))\, \mathrm{d}\omega_s + \int_\tau^{\tau+t} b(X(x, s, \omega))\, \mathrm{d}s \\ &= X(x, \tau, \omega) + \int_0^t \sigma(X(x, s + \tau, \omega))\, \mathrm{d}(\theta_\tau \omega)_s \\ &\quad + \int_0^t b(X(x, s + \tau, \omega))\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

故 $X(x, \tau + \cdot, \omega)$ 为方程

$$Y_t(\omega) = X(x, \tau, \omega) + \int_0^t \sigma(Y_s(\omega))\, \mathrm{d}(\theta_\tau \omega)_s + \int_0^t b(Y_s(\omega))\, \mathrm{d}s \tag{2.47}$$

的解. 由方程 (2.16) 的轨道唯一性知 (2.46) 式成立. 证毕. □

定理 2.39 设方程 (2.16) 有唯一强解，记初值为 x 的强解为 $X(x, \cdot)$, 若 σ, b 为连续函数，且 X 存在连续修正，则 X 为强 Markov 过程. 即 X 为扩散过程，其无穷小生成元为 $L = \sum_{i=1}^m b^i \partial_i + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^m a_l^i \partial_i \partial_l$.

证明. 任取 f 为 $\mathbb{R}^m$ 上的有界 (或非负) 可测函数，由推论 2.3, 引理 2.37 和 (2.46) 式，我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(f(X(x, \tau + t, \omega))|\mathcal{F}_\tau) \\ = \;& \mathbb{E}(f(X(X(x, \tau, \omega), t, \theta_\tau \omega))|\mathcal{F}_\tau) \\ = \;& \mathbb{E}(f(X(y, t, \theta_\tau \omega)))|_{y=X(x,\tau,\omega)} \\ = \;& \mathbb{E}(f(X(y, t, \omega)))|_{y=X(x,\tau,\omega)}, \end{aligned}$$

其中最后一个等式成立是因为 $\omega \overset{d}{=} \theta_\tau \omega$. 证毕. □

用类似于 Yamada-Ogura(参看 [6]) 中的方法我们可以证明如下的一维随机微分方程解的非接触性和强比较定理：

定理 2.40 (非接触性) 设 ρ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的连续增函数，满足 $\rho(0)=0$ 及

$$\int_{0^+}^1\int_v^1 \frac{1}{\rho^2(u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{0^+}^1 \frac{u}{\rho^2(u)}\,\mathrm{d}u = +\infty, \tag{2.48}$$

且 $\forall t\geqslant 0,\ x,y\in\mathbb{R}$,

$$\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\|\leqslant\rho(|x-y|). \tag{2.49}$$

设 γ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的连续增函数，满足 $\gamma(0)=0$ 及

$$\lim_{x\downarrow 0}\left(\sup_{x\leqslant v\leqslant 1}\gamma(v)\int_v^1 \frac{1}{\rho^2(u)}\,\mathrm{d}u\Big/\int_x^1\int_v^1 \frac{1}{\rho^2(u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right)=0, \tag{2.50}$$

且 $\forall t\geqslant 0,\ x,y\in\mathbb{R}$,

$$|b(t,x)-b(t,y)|\leqslant\gamma(|x-y|). \tag{2.51}$$

若存在连续半鞅 $X(\xi,t)$ 和 $X(\eta,t)$ 满足 $\forall t\leqslant\zeta_1$,

$$X(\xi,t)=\xi+\int_0^t \sigma(s,X(\xi,s))\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t b(s,X(\xi,s))\,\mathrm{d}s \qquad \text{a.s.}, \tag{2.52}$$

以及 $\forall t\leqslant\zeta_2$,

$$X(\eta,t)=\eta+\int_0^t \sigma(s,X(\eta,s))\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t b(s,X(\eta,s))\,\mathrm{d}s \qquad \text{a.s.}, \tag{2.53}$$

其中 $\xi,\eta\in\mathcal{F}_0$,

$$\zeta_1=\sup\left\{t:\sup_{s\leqslant t}|X(\xi,s)|<+\infty\right\},$$
$$\zeta_2=\sup\left\{t:\sup_{s\leqslant t}|X(\eta,s)|<+\infty\right\},$$

则由

$$\xi<\eta \qquad \text{a.s.}$$

可推出

$$\mathbb{P}(X(\xi,t)<X(\eta,t),t<\zeta)=1,$$

其中 $\zeta=\zeta_1\wedge\zeta_2$.

注 2.41 我们可取

$$\rho(u)=\begin{cases}0 & (u=0)\\ u(\log\frac{2}{u})^{1/2} & (0<u\leqslant\delta)\\ \delta(\log\frac{2}{\delta})^{1/2} & (u>\delta)\end{cases},$$

以及

$$\gamma(u)=\begin{cases}0 & (u=0)\\ u\log\frac{2}{u} & (0<u\leqslant\delta)\\ \delta\log\frac{2}{\delta} & (u>\delta)\end{cases},$$

其中 $\delta\in(0,1)$ 充分小.

定理 2.42 (强比较定理) 设 ρ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增函数，满足 $\rho(0)=0$ 以及 $\forall\varepsilon>0$,

$$\int_{0^+}^{1}\mathrm{e}^{\varepsilon B(v)}\,\mathrm{d}v=+\infty, \tag{2.54}$$

其中

$$B(v)=\int_v^1\frac{1}{\rho^2(u)}\,\mathrm{d}u, \tag{2.55}$$

且 $\forall t\geqslant 0$, $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\|\leqslant\rho(|x-y|). \tag{2.56}$$

若 $\forall t\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$

$$b_1(t,x)<b_2(t,x),$$

且存在连续半鞅 $X_1(\xi,t)$ 和 $X_2(\eta,t)$ 满足

$$X_1(\xi,t)=\xi+\int_0^t\sigma(s,X_1(\xi,s))\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t b_1(s,X_1(\xi,s))\,\mathrm{d}s, \tag{2.57}$$

$$X_2(\eta,t)=\eta+\int_0^t\sigma(s,X_2(\eta,s))\,\mathrm{d}W_s+\int_0^t b_2(s,X_2(\eta,s))\,\mathrm{d}s, \tag{2.58}$$

则由

$$\mathbb{P}(X_1(\xi,t)\leqslant X_2(\eta,t),t<\zeta)=1$$

可推出

$$\mathbb{P}(X_1(\xi,t)<X_2(\eta,t),0<t<\zeta)=1,$$

其中

$$\zeta=\sup\left\{t:\sup_{s\leqslant t}|X_1(\xi,s)|<+\infty,\sup_{s\leqslant t}|X_2(\eta,s)|<+\infty\right\}.$$

注 2.43 我们可取

$$\rho(u) = u^{\alpha},$$

其中 $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$.

2.4 由无穷个 Brown 运动驱动的倒向随机微分方程

沿用 1.4 节和 2.1 节中的记号，其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R}^m) &= \Big\{b:[0,T]\times\Omega\mapsto\mathbb{R}^m \mid b \text{ 为可测适应 } \mathbb{R}^m \text{ 值过程,} \\
&\qquad \text{且} \int_0^T \mathbb{E}|b_s|^2\,\mathrm{d}s < +\infty\Big\}, \\
\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R}^m\otimes l^2) &= \Big\{\sigma:[0,T]\times\Omega\mapsto\mathbb{R}^m\otimes l^2 \mid \sigma \text{ 为可测适应 } \mathbb{R}^m\otimes l^2 \text{ 值过程,} \\
&\qquad \text{且} \int_0^T \mathbb{E}\|\sigma_s\|^2\,\mathrm{d}s < +\infty\Big\}.
\end{aligned}$$

本节我们考虑如下 $\mathbb{R}^m$ 值半线性倒向随机微分方程:

$$X_T = X_t + \int_t^T (\sigma(s,X_s)+Y_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_t^T b(s,X_s,Y_s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.59}$$

其中 $W=(W^1,W^2,\cdots)$, $\{W^j, j=1,2,\cdots\}$ 为完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 运动， $\mathcal{F}_t$ 为 W 生成的完备自然 σ 代数流， $T>0$, 且有

(C1‴) $X_T:\Omega\to\mathbb{R}^m$, 满足 $X_T\in\mathcal{F}_T/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, 且 $\mathbb{E}\left(|X_T|^2\right) < +\infty$.

(C2‴) $\sigma:[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^m\otimes l^2$, 满足 $\sigma\in\mathcal{B}([0,T])\times\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m\otimes l^2)$, 且 $\forall t\in[0,T]$, $\sigma(t,\cdot,\cdot):\Omega\times\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^m\otimes l^2$ 为 $\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m\otimes l^2)$ 可测.

(C3‴) $b:[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\otimes l^2\mapsto\mathbb{R}^m$, 满足 $b\in\mathcal{B}([0,T])\times\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^m\otimes l^2)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, 且 $\forall t\in[0,T]$, $b(t,\cdot,\cdot,\cdot):\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\otimes l^2\mapsto\mathbb{R}^m$ 为 $\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^m\otimes l^2)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测.

注 2.44 方程 (2.59) 有解是指 $\exists(X,Y)\in\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R}^m)\times\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R}^m\otimes l^2)$ 满足方程 (2.59). 方程 (2.59) 的解唯一是指若 (X,Y) 和 (X',Y') 均为方程 (2.59) 的解，则

$$\int_0^T \mathbb{E}|X_s-X_s'|^2\,\mathrm{d}s < +\infty, \int_0^T \mathbb{E}\|Y_s-Y_s'\|^2\,\mathrm{d}s < +\infty.$$

由定理 1.47 及注 1.49, 我们有如下定理:

定理 2.45 设 λ 为非负函数，且满足 $\int_0^T \lambda(s)\,\mathrm{d}s < +\infty$, ρ_1 和 ρ_2 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数，满足 $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0$ 且

$$\int_{0^+} \frac{u}{\rho_1^2(u) + \rho_2^2(u)}\,\mathrm{d}u = +\infty. \tag{2.60}$$

若 $\sigma(t,\omega,0) \in \mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R}^m \otimes l^2)$, $b(t,\omega,0,0) \in \mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, 且 $\forall t \in [0,T]$, $X, X' \in \mathbb{R}^m$, $Y, Y' \in \mathbb{R}^m \otimes l^2$, 有

$$\|\sigma(t,X) - \sigma(t,X')\| \leqslant \sqrt{\lambda(t)}\rho_1(|X - X'|) \quad \text{a.s.}, \tag{2.61}$$

$$|b(t,X,Y) - b(t,X',Y')| \leqslant \sqrt{\lambda(t)}\rho_2(|X - X'|) + C\|Y - Y'\| \quad \text{a.s.}, \tag{2.62}$$

则方程 (2.59) 的解存在唯一.

注 2.46 若 (2.60) 式成立，则

$$\int_{0^+} \rho_1^{-2}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{0^+} \rho_2^{-2}(u)\,\mathrm{d}u = +\infty. \tag{2.63}$$

注 2.47 在定理 2.45 的条件下, 取 $X' = 0$ 以及 $Y' = 0$, 则 $\forall t \in [0,T]$, $X \in \mathbb{R}^m$, $Y \in \mathbb{R}^m \otimes l^2$,

$$\|\sigma(t,X)\| \leqslant \|\sigma(t,0)\| + \sqrt{\lambda(t)}\rho_1(|X|) \quad \text{a.s.}, \tag{2.64}$$

$$|b(t,X,Y)| \leqslant |b(t,0,0)| + \sqrt{\lambda(t)}\rho_2(|X|) + C\|Y\| \quad \text{a.s..} \tag{2.65}$$

由引理 2.27, 存在 $\tilde{\lambda}$ 为非负函数，且满足 $\int_0^T \tilde{\lambda}(s)\,\mathrm{d}s < +\infty$, 使

$$\|\sigma(t,X)\| \leqslant \|\sigma(t,0)\| + \sqrt{\tilde{\lambda}(t)}\,(1 + |X|) \quad \text{a.s.}, \tag{2.66}$$

$$|b(t,X,Y)| \leqslant |b(t,0,0)| + \sqrt{\tilde{\lambda}(t)}\,(1 + |X|) + C\|Y\| \quad \text{a.s..} \tag{2.67}$$

由引理 1.41, 令 $\gamma(u) = \rho_1^2(u^{\frac{1}{2}}) + \rho_2^2(u^{\frac{1}{2}})$, $G(t,u) = 2\lambda(t)\gamma(u)$, $H(t,u) = 3G(t,u) + 2\mathbb{E}\|\sigma(t,0)\|^2 + 3\mathbb{E}|b(t,0,0)|^2$ 或 $10\tilde{\lambda}(t)(1+u) + 2\mathbb{E}\|\sigma(t,0)\|^2 + 3\mathbb{E}|b(t,0,0)|^2$, 则 γ, G, H 满足注 1.48 中的条件.

3 双参数随机微分方程

3.1 双参数随机分析简介

以下内容可参看 Cairoli-Walsh [36].

设 $z=(s,t)$, $z'=(s',t')\in\mathbb{R}_+^2=[0,\infty)\times[0,\infty)$. 若 $s\leqslant s'$ 且 $t\leqslant t'$, 则记为 $z\leqslant z'$, 若 $s<s'$ 且 $t<t'$, 则记为 $z<z'$, 若 $s\leqslant s'$ 且 $t\geqslant t'$, 则记为 $z\,\overline{\overline{\wedge}}\,z'$, 若 $s<s'$ 且 $t>t'$, 则记为 $z\,\overline{\wedge}\,z'$. 令 $z\otimes z'=(s,t')$, $z\wedge z'=(s\wedge s',t\wedge t')$ 以及 $z\vee z'=(s\vee s',t\vee t')$, 则若 $z\,\overline{\overline{\wedge}}\,z'$, 我们有 $z\otimes z'=z\wedge z'$. 若 $z<z'$, 我们令 $(z,z')=\{\xi\in\mathbb{R}_+^2:z<\xi<z'\}$, $[z,z')$, $(z,z']$ 和 $[z,z']$ 可做类似定义. $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, 设 $R_z=[0,z]=R_z^1\cap R_z^2$, 其中 $R_z^1=[0,s]\times\mathbb{R}_+$, $R_z^2=\mathbb{R}_+\times[0,t]$. 若 f 为从 $\mathbb{R}_+^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 定义 f 在矩形 $(z,z']$ 上的增量为 $f((z,z'])=f(z')-f(z\otimes z')-f(z'\otimes z)+f(z)$.

令 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为某完备概率空间, $(\mathcal{F}_z)_{z\in\mathbb{R}_+^2}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数族，满足：

(F1) 若 $z\leqslant z'$, 则 $\mathcal{F}_z\subset\mathcal{F}_{z'}$,

(F2) $\mathcal{F}_0$ 包含 $\mathcal{F}$ 中的所有零测集,

(F3) $\forall z$, $\mathcal{F}_z=\mathcal{F}_{z^+}=\bigcap\limits_{z<z'}\mathcal{F}_{z'}$ (记 $\mathcal{F}_{z^-}=\bigvee\limits_{z'<z}\mathcal{F}_{z'}$),

(F4) $\forall z$, $\mathcal{F}_z^1=\bigvee\limits_{t'\geqslant 0}\mathcal{F}_{st'}=\bigvee\limits_{z'\in\mathbb{R}_+^2}\mathcal{F}_{z\otimes z'}$ 及 $\mathcal{F}_z^2=\bigvee\limits_{s'\geqslant 0}\mathcal{F}_{s't}=\bigvee\limits_{z'\in\mathbb{R}_+^2}\mathcal{F}_{z'\otimes z}$ 关于 $\mathcal{F}_z$ 条件独立 (故 $\mathcal{F}_z^1\cap\mathcal{F}_z^2=\mathcal{F}_z$),

此时我们称 $\mathcal{F}_z$ 满足通常条件.

$\forall A\subset\mathbb{R}_+^2$, 令 $\mathcal{F}(A)=\bigvee\limits_{z\in A}\mathcal{F}_z$, 则 $\mathcal{F}_z=\mathcal{F}(R_z)$, $\mathcal{F}_z^1=\mathcal{F}(R_z^1)$, $\mathcal{F}_z^2=\mathcal{F}(R_z^2)$.

定义 3.1 $\tau:\Omega\mapsto\overline{\mathbb{R}_+^2}$, 若 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, $\{\tau\leqslant z\}\in\mathcal{F}_z$, 则称 τ 为关于 $\mathcal{F}_z$ 的停时.

记 $\mathcal{F}_\tau=\{A\in\mathcal{F}_\infty:A\cap\{\tau\leqslant z\}\in\mathcal{F}_z,\forall z\in\mathbb{R}_+^2\}$, $\mathcal{F}_{\tau^-}=\sigma(\mathcal{F}_0\cup(\mathcal{F}_z\cap\{\tau>z\}))=\sigma(\mathcal{F}_{z^-}\cap\{\tau\geqslant z\})$.

定义 3.2 $\{X_z:z\in\mathbb{R}_+^2\}$, 若 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, $X_z\in\mathcal{F}$, 则称 X 为双参数随机过程. 若 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, $X_z\in\mathcal{F}_z$, 则称 X 为双参数适应过程. 若 $(z,\omega)\mapsto X_z(\omega)$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)\times\mathcal{F}$ 可测, 则称 X 为双参数可测过程. 若 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2, B\in\mathcal{B}$, $\{(z,\omega):X_\xi(\omega)\in B,\xi\leqslant z\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)\times\mathcal{F}_z$, 则称 X 为双参数循序可测过程. 若 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, X_z 可积, 则称 X 为双参数可积过程. 若 $\forall z\in\partial\mathbb{R}_+^2$, $X_z=0$ a.s., 则称 X 为双参数零初值过程. 四参数随机过程 $\{\phi_{(\xi,\eta)}:\xi,\eta\in\mathbb{R}_+^2\}$, 若 ϕ 为

$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)\times\mathcal{F}$ 可测，则称 ϕ 为四参数可测过程. 若 $\forall\xi,\eta\in\mathbb{R}_+^2$, $\phi_{(\xi,\eta)}\in\mathcal{F}_{\xi\vee\eta}$, 则称 ϕ 为四参数适应过程.

记 $\mathcal{P}=\sigma(X, X$ 为双参数连续适应过程$)$, $\mathcal{O}=\sigma(X, X$ 为双参数右连左极过程$)$.

定义 3.3 设 X, Y 为双参数随机过程，若 X 与 Y 的有限维分布相同，则称 X 与 Y 同分布，记为 $X\overset{d}{=}Y$. 若 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, $X_z=Y_z$ a.s., 则称 X 与 Y 互为修正，记为 $X\overset{\mathbb{P}}{=}Y$. 若对 a.a. ω, $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, $X_z=Y_z$, 则称 X 与 Y 无区别，记为 $X=Y$.

命题 3.4 设 H 为一实可分 Hilbert 空间，则存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 及其上 Gauss 过程 $\{W_h: h\in H\}$, 使 $h\mapsto W_h$ 为线性, 且 $\mathbb{E}(W_h)=0$, $\mathbb{E}(W_hW_g)=(h,g)$. 此时称 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},H)$ 为 Gauss 概率空间.

命题 3.5 设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 为可分 σ 有限测度空间, 则 $H=\mathcal{L}^2(X,\mathcal{S},\mu)$ 为可分 Hilbert 空间. $\forall A\in\mathcal{S}$, 若 $\mu(A)<+\infty$, 记 $W(A)=W_{I_A}$, 则 $W(A)$ 服从 Gauss 分布 $\mathcal{N}(0,\mu(A))$, 且 $\mathbb{E}(W(A)W(B))=\mu(A\cap B)$. 此时称 W 为 $(X,\mathcal{S})$ 上的强度为 μ 的 Gauss 随机测度, 且满足 $\forall A_n\in\mathcal{S}$ 两两不交，$\mu(A_n)<+\infty$, $n=1,2,\cdots$, 若 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{S}$, 满足 $\mu(A)<+\infty$, 则 $\{W(A_n), n=1,2,\cdots\}$ 独立，且 $W(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}W(A_n)$ a.s..

显然， $W_h=\int_X h_tW(\mathrm{d}t)$. 若 $(X,\mathcal{S})=(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, μ 为 Lebesgue 测度，令 $W_t=W([0,t])$, 则 W_t 为 Brown 运动. 若 $(X,\mathcal{S})=(\mathbb{R}_+^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2))$, μ 为二维 Lebesgue 测度，令 $W_z=W(R_z)$, 则 W_z 为 Brown 单.

定义 3.6 若 Υ 为 $(\mathbb{R}_+^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2))$ 上强度测度为 Λ 的 Poisson 随机测度，称 $\Upsilon_z=\Upsilon(R_z)$ 为 Poisson 单. 设 $\forall z\in\partial\mathbb{R}_+^2$, $\Upsilon_z=0$ a.s., 则 Υ 为双参数零初值右连续过程，且 $\Lambda_z=\Lambda(R_z)=\mathbb{E}(\Upsilon_z)$. 设 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, $\Lambda_z<+\infty$, 令 $N=\Upsilon-\Lambda$.

定义 3.7 双参数可积适应过程 M, 若 $\forall z<z'$, 有 $\mathbb{E}(M_{z'}|\mathcal{F}_z)=M_z$, 则称 M 为双参数鞅.

定义 3.8 双参数可积适应过程 M,

(1) 若 $\forall z<z'$, $\mathbb{E}(M((z,z'])|\mathcal{F}_z)=0$, 则称 M 为双参数弱鞅.

(2) 若 $\forall t(s)\in\mathbb{R}_+$, $\{M_z: z=(s,t)\}$ 为关于 $\mathcal{F}_z^1(\mathcal{F}_z^2)$ 的鞅，则称 M 为双参数 1(2)-鞅.

(3) 若 M 为双参数零初值过程，且 $\forall z<z'$, $\mathbb{E}(M((z,z'])|\mathcal{F}_z^1\vee\mathcal{F}_z^2)=0$, 则称 M 为双参数强鞅.

显然, M 为双参数 1(2)- 鞅等价于 $\forall z<z'$, $\mathbb{E}(M((z,z'])|\mathcal{F}_z^1)=0$ $(\mathbb{E}(M((z,z'])|\mathcal{F}_z^2)=0)$, 且 $M_{(s,0)}$ 为关于 $\mathcal{F}_{(s,0)}^1$ 的鞅 ($M_{(0,t)}$ 为关于 $\mathcal{F}_{(0,t)}^2$ 的鞅). M 为双参数弱鞅等价于 $M=M^1+M^2$, 其中 M^i 为双参数 i- 鞅， $i=1,2$. 双参数强鞅为双参数鞅，双参数鞅等

价于它既为双参数 1- 鞅又为双参数 2- 鞅，双参数 1(2)- 鞅为双参数弱鞅． Brown 单 W 为双参数连续平方可积强鞅， N 为双参数右连续平方可积强鞅.

定义 3.9 双参数零初值右连续适应过程 B, 若对任意矩形 $R \subset \mathbb{R}_+^2$, $B(R) \geqslant 0$, 则称 B 为双参数增过程. 若 B 为两个双参数增过程之差，则称 B 为双参数有限变差过程.

后面我们将用到下面一些记号：

$\mathcal{V}$ 表示双参数有限变差过程,

$\mathcal{V}^+$ 表示双参数增过程,

$\mathcal{V}_c = \{B : B \in \mathcal{V}, B\text{连续}\}$,

$\mathcal{V}_c^+ = \{B : B \in \mathcal{V}^+, B\text{连续}\}$,

$\mathcal{M}^p$ 表示双参数右连续 p 次可积鞅全体,

$\mathcal{M}_c^p = \{M : M \in \mathcal{M}^p, M\text{连续}\}$,

$\mathcal{M}_s^p = \{M : M \in \mathcal{M}^p, M\text{为双参数强鞅}\}$,

$\mathcal{L}^p = \{b : \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \mapsto \mathbb{R} |\ b \text{ 为双参数可测适应过程}, \forall z, \int_{R_z} \mathbb{E}|b_\xi|^p \, \mathrm{d}\xi < +\infty\}$,

$\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}^p = \{b : \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \mapsto \mathbb{R} |\ b \text{ 为双参数可测适应过程}, \forall z, \int_{R_z} |b_\xi|^p \, \mathrm{d}\xi < +\infty \text{ a.s.}\}$.

定理 3.10 (1) **(极大值不等式)** 设 $\lambda > 0$, 若 $M \in \mathcal{M}^1$, 则

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_z |M_z| \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left(1 + \sup_z \mathbb{E}(|M_z| \log^+ |M_z|)\right), \tag{3.1}$$

(2) **(Doob 不等式)** 设 $p > 1$, 若 $M \in \mathcal{M}^p$, 则

$$\mathbb{E}\left(\sup_z |M_z|^p\right) \leqslant q^{2p} \sup_z \mathbb{E}\left(|M_z|^p\right), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{3.2}$$

$\forall M \in \mathcal{M}^2$, 存在可料双参数增过程 $\langle M \rangle$, 满足 $M^2 - \langle M \rangle$ 为双参数弱鞅，称 $\langle M \rangle$ 为双参数可料平方变差过程. $\forall M, N \in \mathcal{M}^2$, 记 $\langle M, N \rangle = \frac{1}{2}(\langle M+N \rangle - \langle M \rangle - \langle N \rangle)$, 则 $\langle M, N \rangle$ 为可料双参数有限变差过程，且满足 $MN - \langle M, N \rangle$ 为双参数弱鞅，称 $\langle M, N \rangle$ 为双参数可料交互变差过程. $\forall M \in \mathcal{M}_s^2$, 存在 $\mathcal{F}_z^i$- 可料增过程 $[M]^i$, 满足 $M^2 - [M]^i$ 为双参数 i - 鞅. $\forall M, N \in \mathcal{M}_s^2$, 记 $[M, N]^i = \frac{1}{2}\Big([M+N]^i - [M]^i - [N]^i\Big)$, 则 $[M, N]^i$ 为 $\mathcal{F}_z^i$- 可料有限变差过程，且满足 $MN - [M, N]^i$ 为双参数 i- 鞅， $i = 1, 2$.

显然，对 Brown 单 W 有 $\langle W \rangle_z = [W]_z^1 = [W]_z^2 = st$. 对 N 有 $\langle N \rangle_z = \Lambda_z$.

下面是双参数平方可积鞅的 Burkholder-Davis-Gundy 不等式：

命题 3.11 (参看 Chevalier [37], **Burkholder-Davis-Gundy 不等式**) 若 $p>1$, $M\in\mathcal{M}^2$, 则存在常数 $C_p,\tilde{C}_p>0$, 使得 $\forall z\in\mathbb{R}^2_+$,

$$\tilde{C}_p\mathbb{E}\langle M\rangle_z^{\frac{p}{2}}\leqslant\mathbb{E}\left(\sup_{\xi\leqslant z}|M_\xi|^p\right)\leqslant C_p\mathbb{E}\langle M\rangle_z^{\frac{p}{2}}. \tag{3.3}$$

设 $M\in\mathcal{M}^2$, $\mathfrak{P}$ 为 $\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}^2_+\times\Omega$ 上的可料 σ 代数，记 ${}^i\mathcal{P}$ 为 $\mathbb{R}^2_+\times\Omega$ 上关于 $\mathcal{F}^i_z$ 的可料 σ 代数， $i=1,2$. 另记

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^2(M) &= \left\{\sigma:\mathbb{R}^2_+\times\Omega\mapsto\mathbb{R}\middle|\sigma\in\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R}),\forall z,\mathbb{E}\left(\int_{R_z}|\sigma_\xi|^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_\xi\right)<+\infty\right\},\\
{}^i\mathcal{L}^2(M) &= \left\{\sigma:\mathbb{R}^2_+\times\Omega\mapsto\mathbb{R}\middle|\sigma\in{}^i\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R}),\forall z,\mathbb{E}\left(\int_{R_z}|\sigma_\xi|^2\,\mathrm{d}[M]^i_\xi\right)<+\infty\right\},\\
\mathcal{L}^2(MM) &= \Big\{\phi:\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}^2_+\times\Omega\mapsto\mathbb{R}\Big|\phi\in\mathfrak{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R}),\forall z,\\
&\qquad \mathbb{E}\Big(\iint_{R_z\times R_z}I_{\{\xi\bar{\wedge}\eta\}}|\phi_{(\xi,\eta)}|^2\,\mathrm{d}[M]^2_\xi\,\mathrm{d}[M]^1_\eta\Big)<+\infty\Big\}.
\end{aligned}$$

我们给出以下双参数随机积分的一些性质：

命题 3.12 (1) 若 $\sigma\in\mathcal{L}^2(M)$, 则 $X_z=\int_{R_z}\sigma_\xi\,\mathrm{d}M_\xi\in\mathcal{M}^2$ (若 $M\in\mathcal{M}^2_c(\mathcal{M}^2_s)$, 则 $X\in\mathcal{M}^2_c(\mathcal{M}^2_s)$), 且满足

$$\mathbb{E}(|X_z|^2) = \mathbb{E}\left(\int_{R_z}|\sigma_\xi|^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_\xi\right),\qquad\forall z\in\mathbb{R}^2_+, \tag{3.4}$$

$$\langle X\rangle_z = \int_{R_z}|\sigma_\xi|^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_\xi,\qquad\forall z\in\mathbb{R}^2_+. \tag{3.5}$$

(2) 若 $M\in\mathcal{M}^2_s$, $\sigma\in{}^i\mathcal{L}^2(M)$, 则 $X_z=\int_{R_z}\sigma_\xi\,\mathrm{d}M_\xi$ 为关于 $s(t)$ 右连续的双参数 i- 鞅 (若 M 连续则 X 关于 $s(t)$ 连续), 且满足

$$\mathbb{E}(|X_z|^2) = \mathbb{E}\left(\int_{R_z}|\sigma_\xi|^2\,\mathrm{d}[M]^i_\xi\right),\qquad\forall z\in\mathbb{R}^2_+, \tag{3.6}$$

$$[X]^i_z = \int_{R_z}|\sigma_\xi|^2\,\mathrm{d}[M]^i_\xi,\qquad\forall z\in\mathbb{R}^2_+, \tag{3.7}$$

$i=1,2$.

(3) 若 $M\in\mathcal{M}^4_s$, $\phi\in\mathcal{L}^2(MM)$, 则 $X_z=\iint_{R_z\times R_z}\phi_{(\xi,\eta)}\,\mathrm{d}M_\xi\,\mathrm{d}M_\eta\in\mathcal{M}^2$ (若 M 连续则 X 连续), 且满足 $\langle X,M\rangle_z=0$, 以及

$$\mathbb{E}(|X_z|^2) = \mathbb{E}\left(\iint_{R_z\times R_z}|\phi_{(\xi,\eta)}|^2\,\mathrm{d}[M]^2_\xi\,\mathrm{d}[M]^1_\eta\right),\qquad\forall z\in\mathbb{R}^2_+, \tag{3.8}$$

$$\langle X\rangle_z = \iint_{R_z\times R_z}|\phi_{(\xi,\eta)}|^2\,\mathrm{d}[M]^2_\xi\,\mathrm{d}[M]^1_\eta,\qquad\forall z\in\mathbb{R}^2_+. \tag{3.9}$$

注 3.13 若 $M=W$, 则 $\mathcal{L}^2(W)$ 的定义中可只要求 σ 为双参数可测适应过程, ${}^i\mathcal{L}^2(W)$ 的定义中可只要求 σ 为双参数可测 $\mathcal{F}_z^i$- 适应过程, $i=1,2$, $\mathcal{L}^2(WW)$ 的定义中可只要求 ϕ 为四参数可测适应过程.

定理 3.14 (随机 Fubini 定理) 设 $M\in\mathcal{M}_s^4$, 且 $[M]^1$ 和 $[M]^2$ 为非随机的, $\phi\in\mathcal{L}^2(MM)$, 则 $\phi_{(\cdot,\eta)}$ 为双参数 $\mathcal{F}_\xi^2$- 可料过程, 且对 $\mathrm{d}[M]^1$a.e. η, $\mathbb{E}(\int_{R_z}|\phi_{(\xi,\eta)}|^2\,\mathrm{d}[M]_\xi^2)<+\infty$. 此外, 我们可定义双参数 $\mathcal{F}_\eta^1$- 可料过程 $I(\eta)=\int_{R_z}\phi_{(\xi,\eta)}\,\mathrm{d}M_\xi$, 使得对 $\mathrm{d}[M]^1$a.e. η, 有

$$\mathbb{E}\left(\int_{R_z}|I(\eta)|^2\,\mathrm{d}[M]_\eta^1\right)=\mathbb{E}\left(\iint_{R_z\times R_z}|\phi_{(\xi,\eta)}|^2\,\mathrm{d}[M]_\xi^2\,\mathrm{d}[M]_\eta^1\right), \tag{3.10}$$

以及

$$\int_{R_z}I(\eta)\,\mathrm{d}M_\eta=\iint_{R_z\times R_z}\phi_{(\xi,\eta)}\,\mathrm{d}M_\xi\,\mathrm{d}M_\eta. \tag{3.11}$$

定理 3.15 (可料表示性定理) 设 $\mathcal{F}_z=\sigma\{W_\xi,\xi\leqslant z\}$, $M\in\mathcal{M}^2$, 则存在 $\sigma\in\mathcal{L}^2(W)$, $\phi\in\mathcal{L}^2(WW)$, 使 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$,

$$M_z=M_0+\int_{R_z}\sigma_\xi\,\mathrm{d}W_\xi+\iint_{R_z\times R_z}\phi_{(\xi,\eta)}\,\mathrm{d}W_\xi\,\mathrm{d}W_\eta. \tag{3.12}$$

定理 3.16 (参看 Liang [22], **Itô 公式**) 设

$$X_z \;=\; X_0+\int_{R_z}\sigma_\xi\,\mathrm{d}M_\xi+\int_{R_z}b_\xi\,\mathrm{d}A_\xi, \tag{3.13}$$

其中

(1) $X_0\in\mathcal{F}_0/\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

(2) $M\in\mathcal{M}_c^2\cap\mathcal{M}_s^2$, 且为双参数零初值过程, $\langle M\rangle=[M]^1=[M]^2$,

(3) $A\in\mathcal{V}_c$, 且为双参数零初值过程,

(4) $\sigma\in\mathcal{L}^2(M)$,

(5) b 为双参数循序可测过程, 且 $\forall z$, $\int_{R_z}\mathbb{E}|b_\xi|\,\mathrm{d}|A|_\xi<+\infty$,

若 $F\in\mathcal{C}^4(\mathbb{R})$, 则 $F(X_t)$ 为双参数半鞅, 且满足

$$\begin{aligned}F(X_z) \;=\; & F(X_0)+\int_{R_z}F'(X_\xi)\sigma_\xi\,\mathrm{d}M_\xi+\int_{R_z}F'(X_\xi)b_\xi\,\mathrm{d}A_\xi\\ &+\frac{1}{2}\int_{R_z}F''(X_\xi)|\sigma_\xi|^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_\xi\\ &+\iint_{R_z\times R_z}I_{\{\xi\overline{\overline{\wedge}}\eta\}}F''(X_{\xi\vee\eta})\sigma_\xi\sigma_\eta\,\mathrm{d}M_\xi\,\mathrm{d}M_\eta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\iint_{R_z\times R_z} I_{\{\xi\stackrel{=}{\wedge}\eta\}}F''(X_{\xi\vee\eta})b_\xi b_\eta\,\mathrm{d}A_\xi\,\mathrm{d}A_\eta\\
&+\iint_{R_z\times R_z} I_{\{\xi\stackrel{=}{\wedge}\eta\}}F''(X_{\xi\vee\eta})\sigma_\eta b_\xi\,\mathrm{d}A_\xi\,\mathrm{d}M_\eta\\
&+\iint_{R_z\times R_z} I_{\{\xi\stackrel{=}{\wedge}\eta\}}F''(X_{\xi\vee\eta})\sigma_\xi b_\eta\,\mathrm{d}M_\xi\,\mathrm{d}A_\eta\\
&+\frac{1}{2}\iint_{R_z\times R_z} I_{\{\xi\stackrel{=}{\wedge}\eta\}}F'''(X_{\xi\vee\eta})\sigma_\eta|\sigma_\xi|^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_\xi\,\mathrm{d}M_\eta\\
&+\frac{1}{2}\iint_{R_z\times R_z} I_{\{\xi\stackrel{=}{\wedge}\eta\}}F'''(X_{\xi\vee\eta})\sigma_\xi|\sigma_\eta|^2\,\mathrm{d}M_\xi\,\mathrm{d}\langle M\rangle_\eta\\
&+\frac{1}{2}\iint_{R_z\times R_z} I_{\{\xi\stackrel{=}{\wedge}\eta\}}F'''(X_{\xi\vee\eta})b_\eta|\sigma_\xi|^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_\xi\,\mathrm{d}A_\eta\\
&+\frac{1}{2}\iint_{R_z\times R_z} I_{\{\xi\stackrel{=}{\wedge}\eta\}}F'''(X_{\xi\vee\eta})b_\xi|\sigma_\eta|^2\,\mathrm{d}A_\xi\,\mathrm{d}\langle M\rangle_\eta\\
&+\frac{1}{4}\iint_{R_z\times R_z} I_{\{\xi\stackrel{=}{\wedge}\eta\}}F^{(4)}(X_{\xi\vee\eta})|\sigma_\xi|^2|\sigma_\eta|^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_\xi\,\mathrm{d}\langle M\rangle_\eta,\\
&a.s.. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

定义 3.17 (参看 Liang [22]) 设 B 为 $\mathbb{R}_+^n$ 上的函数,

(1) 若 $\forall z,z'\in\mathbb{R}_+^n$, $\lambda\in[0,1]$, 有 $B(\lambda z+(1-\lambda)z')\geqslant(\leqslant)\lambda B(z)+(1-\lambda)B(z')$, 则称 B 为凹 (凸) 函数.

(2) 若 $\forall z,z'\in\mathbb{R}_+^n$, $z\leqslant z'$, 有 $B(z)\leqslant B(z')$, 则称 B 为在序意义下的增函数.

(3) 若对任意矩形 $R\subset\mathbb{R}_+^n$, 有 $f(R)\geqslant 0$, 则称 B 为在测度意义下的增函数，简称 B 为增函数.

引理 3.18 (参看 Liu [24], **Gronwall-Bellman 引理**) 设 g,h,λ 为 $\mathbb{R}_+^2$ 上的非负函数， B 为 $\mathbb{R}_+^2$ 上的连续增函数，满足 $\forall z\in\partial\mathbb{R}_+^2$, 有 $B(z)=0$. 若 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$,

$$
g(z)\leqslant h(z)+\int_{R_z}\lambda(\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}B(\xi),
$$

则 $g(z)\leqslant h^*(z)\exp\left(\int_{R_z}\lambda(\xi)\,\mathrm{d}B(\xi)\right)$, 其中 $h^*(z)=\sup\limits_{\xi\leqslant z}|h(\xi)|$.

引理 3.19 (1)(参看 Liang [22]) 设 G 与 G' 分别为 $\mathbb{R}_+$ 与 $\mathbb{R}_+^3$ 上的在序意义下的增凹函数，满足 $G(0)=0$, $G'(0,0,0)=0$ 以及

$$
\int_{0^+}\frac{1}{G(u)+G'(u,u,u)}\,\mathrm{d}u=+\infty. \qquad (3.15)
$$

若 $\mathbb{R}_+^2$ 上的非负函数 Z 满足 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$,

$$
Z_z\leqslant\int_{R_z}G(Z_\xi)\,\mathrm{d}\xi+\iint_{R_z\times R_z}G'(Z_\xi,Z_\eta,Z_{\xi\vee\eta})\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,
$$

则 $Z\equiv 0$.

(2)(参看 Liu [24]) 设 $G(z,u)=\lambda(z)\gamma(u)$, 其中 λ 为双参数非负局部可积函数， γ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的连续增函数，满足 $\gamma(0)=0$, 以及

$$\int_{0+}\frac{1}{\gamma(u)}\,\mathrm{d}u=+\infty. \tag{3.16}$$

设 B 为 $\mathbb{R}_+^2$ 上的增函数，满足 $\forall z\in\partial\mathbb{R}_+^2$, 有 $B(z)=0$. 若 $\mathbb{R}_+^2$ 上的非负函数 Z 满足 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$,

$$Z_z\leqslant\int_{R_z}G(\xi,Z_\xi)\,\mathrm{d}B(\xi),$$

则 $Z\equiv 0$.

3.2 关于无穷个 Brown 单的随机积分

令 $\{W^j, j=1,2,\cdots\}$ 为某概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 单， $W=(W^1,W^2,\cdots)$.

为了说明 W 的存在性，我们可以构造概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_z)$ 如下：

设 $\mathfrak{W}^m=\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2,\mathbb{R}^m)$, $\mathfrak{W}_0^m=\{\omega\in\mathfrak{W}^m:\ \omega_0=0\}$, μ^m 表示 $\mathfrak{W}_0^m$ 上的双参数 Wiener 测度. 注意到 $\mathfrak{W}^m$ 和 $\mathfrak{W}_0^m$ 均为可分 Fréchet 空间，其准范为：

$$\|\omega\|=\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\left(\max_{|z|\leqslant j}|\omega_z|\wedge 1\right),$$

则 $\mathfrak{W}^\infty=\prod\limits_{j=1}^{\infty}\mathfrak{W}^1$ 及 $\Omega=\mathfrak{W}_0^\infty=\prod\limits_{j=1}^{\infty}\mathfrak{W}_0^1$ 为 Polish 空间，其度量为：

$$d(\omega,\omega')=\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\left(\|\omega^j-\omega'^j\|\wedge 1\right).$$

令 $\mathbb{P}=\mu^\infty=\prod\limits_{j=1}^{\infty}\mu^1$, $\mathcal{B}_z(\mathfrak{W}^m)=\sigma(\omega_\xi,\xi\leqslant z,\omega\in\mathfrak{W}^m)$ 以及 $\mathcal{B}(\mathfrak{W}^m)=\mathcal{B}_\infty(\mathfrak{W}^m)$. $\mathcal{B}_z(\mathfrak{W}_0^m)$, $\mathcal{B}(\mathfrak{W}_0^m)$, $\mathcal{B}_z(\mathfrak{W}^\infty)$, $\mathcal{B}(\mathfrak{W}^\infty)$, $\mathcal{B}_z(\mathfrak{W}_0^\infty)$ 和 $\mathcal{B}(\mathfrak{W}_0^\infty)$ 可做类似定义，并将 $\mathcal{B}(\mathfrak{W}_0^\infty)$ 完备化成 $\mathcal{F}$, 将 $\mathcal{B}_z(\mathfrak{W}_0^\infty)$ 通常化成 $\mathcal{F}_z$. 定义从 $\mathfrak{W}_0^\infty$ 到第 j 个坐标空间的投影如下：

$$W^j: W^j(\omega)=\omega^j\in\mathfrak{W}_0,$$

则 $\{W^j,j=1,2,\cdots\}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_z)$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 单.

沿用 2.1 节第 39 页中的记号，其中 $m=1$, 类似地，记

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^p_{\text{loc}}(\mathfrak{W}) &= \left\{X:\Omega\mapsto\mathfrak{W}\middle|X\in\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathfrak{W}),\forall z,\mathbb{E}\Big(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta|^p\Big)<+\infty\right\},\\ \mathcal{L}^2(W) &= \Big\{\sigma:\mathbb{R}^2_+\times\Omega\mapsto l^2\Big|\sigma\text{ 为双参数可测适应 } l^2\text{ 值过程},\\ &\qquad \forall z,\int_{R_z}\mathbb{E}\|\sigma_\xi\|^2\,\mathrm{d}\xi<+\infty\Big\}.\end{aligned}$$

我们有如下命题:

命题 3.20 若 $\sigma\in\mathcal{L}^2(W)$, 则 $M_z=\int_{R_z}\sigma_\xi\,\mathrm{d}W_\xi\in\mathcal{M}^2_c\cap\mathcal{M}^2_s$, 且满足

$$\mathbb{E}(|M_z|^2)=\mathbb{E}\left(\int_{R_z}\|\sigma_\xi\|^2\,\mathrm{d}\xi\right),\qquad \forall z\in\mathbb{R}^2_+. \tag{3.17}$$

注 3.21 同有限维空间一样，我们可以假设双参数可测适应 l^2 值过程 $\sigma\in\mathcal{L}^2(W)$ 满足 $\sigma\in\mathcal{P}/\mathcal{B}(l^2)$.

命题 3.22 设 $W=(W^1,W^2,\cdots)$ 为无穷个相互独立的 Brown 单， $\sigma\in\mathcal{L}^2(W)$, 则 $M_z=\int_{R_z}\sigma_\xi\,\mathrm{d}W_\xi$ 的双参数可料平方变差过程为

$$\langle M\rangle_z=\int_{R_z}\|\sigma_\xi\|^2\,\mathrm{d}\xi,\qquad (z\in\mathbb{R}^2_+). \tag{3.18}$$

若 $\sigma'\in\mathcal{L}^2(W)$, $N_z=\int_{R_z}\sigma'_\xi\,\mathrm{d}W_\xi$, 则 M,N 的双参数可料交互变差过程为

$$\langle M,N\rangle_z=\int_{R_z}(\sigma_\xi,\sigma'_\xi)\,\mathrm{d}\xi,\qquad (z\in\mathbb{R}^2_+). \tag{3.19}$$

命题 3.20 和命题 3.22 的证明: 只需证明 (3.18) 式. 令

$$M^n_z=\sum_{j=1}^n\int_{R_z}(\sigma_j)_\xi\,\mathrm{d}W^j_\xi,$$

则有 $(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\in\mathcal{L}^2(W)$, 且 $M^n\in\mathcal{M}^2_c\cap\mathcal{M}^2_s$, 其双参数可料平方变差过程为

$$\langle M^n\rangle_z=\sum_{j=1}^n\int_{R_z}(\sigma_j)^2_\xi\,\mathrm{d}\xi.$$

由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式 (命题 3.11) 可得

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}(M^n_\zeta-M^m_\zeta)^2\right)\leqslant C\sum_{j=m+1}^n\int_{R_z}\mathbb{E}(\sigma_j)^2_\xi\,\mathrm{d}\xi\to 0,\qquad (n>m,m,n\to\infty).$$

故

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant t}(M^n_\zeta-M_\zeta)^2\right)\to 0,\qquad (n\to\infty),$$

$M \in \mathcal{M}_c^2$, 且 $\forall z \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\langle M^n \rangle_z \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M \rangle_z, \qquad (n \to \infty).$$

因而

$$\langle M \rangle_z = \int_{R_z} \|\sigma_\xi\|^2 \, \mathrm{d}\xi.$$

此外， $\forall z < z'$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(M^n((z,z']) - M((z,z'])|\mathcal{F}_z^1 \vee \mathcal{F}_z^2))^2 = 0.$$

由于 $\mathbb{E}(M^n((z,z'])|\mathcal{F}_z^1 \vee \mathcal{F}_z^2) = 0$, 因此

$$\mathbb{E}(M((z,z'])|\mathcal{F}_z^1 \vee \mathcal{F}_z^2) = 0.$$

故 $M \in \mathcal{M}_s^2$. 证毕. □

由上命题立得：

推论 3.23 在命题 3.22 的条件下,

(1) 若可测适应过程 f 满足 $f\|\sigma\|^2 \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}^1$, 则 $\forall z \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\int_{R_z} f_\xi \, \mathrm{d}\langle M \rangle_\xi = \int_{R_z} f_\xi \|\sigma_\xi\|^2 \, \mathrm{d}\xi. \tag{3.20}$$

(2) 若可测适应过程 f 满足 $f\sigma \in \mathcal{L}^2(W)$, 则 $\forall z \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\int_{R_z} f_\xi \, \mathrm{d}M_\xi = \int_{R_z} f_\xi \sigma_\xi \, \mathrm{d}W_\xi. \tag{3.21}$$

由命题 3.22 和推论 3.23, 我们可以对由无穷个 Brown 单驱动的随机积分自由地运用有限维的 Itô 公式， Tanaka 公式以及 Burkholder-Davis-Gundy 不等式.

3.3 双参数带跳随机微分方程

令 $\mathfrak{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$, $\mathcal{B}_z(\mathfrak{D}) = \sigma(X_\xi, \xi \leqslant z, X \in \mathfrak{D})$, $\mathcal{B}(\mathfrak{D}) = \mathcal{B}_\infty(\mathfrak{D})$, $\mathcal{G}_z = \mathcal{F}_z \times \mathcal{B}_z(\mathfrak{D})$ 以及

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}^p(\mathfrak{D}) = \left\{ X : \Omega \mapsto \mathfrak{D} \middle| X \in \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathfrak{D}), \forall z, \mathbb{E}\left(\sup_{\zeta \leqslant z} |X_\zeta|^p\right) < +\infty \right\}.$$

考虑如下的双参数非 Markov 型带跳随机微分方程:

$$\begin{aligned} X_z &= X_0 + \int_{R_z} \sigma(\xi, X)\,\mathrm{d}W_\xi + \int_{R_z} b(\xi, X)\,\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \int_{R_z} \alpha(\xi, X)\,\mathrm{d}\Lambda_\xi + \int_{R_z} \beta(\xi, X)\,\mathrm{d}N_\xi, \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中 $W=(W^1, W^2, \cdots)$, $\{W^j, j=1,2,\cdots\}$ 为某完备带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_z)$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 单，且有

(D1) $X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, 满足 $X_0 \in \mathcal{F}_0/\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 且存在 $p \geqslant 2$, 使 $\mathbb{E}\,(|X_0|^p) < +\infty$.

(D2) $\sigma : \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \times \mathcal{D} \mapsto l^2$, 满足 $\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathcal{D})/\mathcal{B}(l^2)$, 且 $\forall z \in \mathbb{R}_+^2$, $\sigma(z,\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathcal{D} \mapsto l^2$ 为 $\mathcal{G}_z/\mathcal{B}(l^2)$ 可测.

(D3) $b : \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \times \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$, 满足 $b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathcal{D})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 且 $\forall z \in \mathbb{R}_+^2$, $b(z,\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ 为 $\mathcal{G}_z/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测.

(D4) $\alpha : \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \times \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$, 满足 α 为定义在 $\Omega \times \mathcal{D}$ 上关于 $\mathcal{G}_z$ 的双参数可料过程.

(D5) $\beta : \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \times \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$, 满足 β 为定义在 $\Omega \times \mathcal{D}$ 上关于 $\mathcal{G}_z$ 的双参数可料过程.

我们来证明本节的主要定理:

定理 3.24 设

(1) 存在函数 $H(z,u) : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ 满足:

(1a) $H(z,u)$ 对固定的 $u \in \mathbb{R}_+$ 关于 z 对 $\mathrm{d}B_z$ 局部可积，对固定的 $z \in \mathbb{R}_+^2$ 关于 u 为连续增函数，其中 $B_z = z + \Lambda_z$,

(1b) $\forall z \in \mathbb{R}_+^2$, $X \in \mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}^p(\mathfrak{D})$ 有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\,(\|\sigma(z,X)\|^p) + \mathbb{E}\,(|b(z,X)|^p) + \mathbb{E}(|\alpha(z,X)|^p) + \mathbb{E}(|\beta(z,X)|^p) \\ \leqslant\ & H\left(z, \mathbb{E}\left(\sup_{\zeta \leqslant z} |X_\zeta|^p\right)\right), \end{aligned}$$

(1c) $\forall K > 0$ 及初值 ($z \in \partial\mathbb{R}_+^2$ 时的值)$u_0 \geqslant 5^{p-1}\mathbb{E}\,(|X_0|^p)$, 方程

$$\mathrm{d}u = KH(z,u)\,\mathrm{d}B_z$$

有全局解.

(2) 存在函数 $G(z,u) : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ 满足:

(2a) $G(z,u)$ 对固定的 $u \in \mathbb{R}_+$ 关于 z 对 $\mathrm{d}B_z$ 局部可积，对固定的 $z \in \mathbb{R}_+^2$ 关于 u 为连续增函数，且 $G(z,0)=0$,

(2b) $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, $X,Y\in\mathfrak{L}^p_{\rm loc}(\mathfrak{D})$ 有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\|\sigma(z,X)-\sigma(z,Y)\|^p\right)+\mathbb{E}\left(|b(z,X)-b(z,Y)|^p\right)\\&+\mathbb{E}\left(|\alpha(z,X)-\alpha(z,Y)|^p\right)+\mathbb{E}\left(|\beta(z,X)-\beta(z,Y)|^p\right)\\\leqslant\ &G\left(z,\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta-Y_\zeta|^p\right)\right),\end{aligned}$$

(2c) $\forall K>0$, 若 $\mathbb{R}_+$ 上的非负函数 Z 满足 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$,

$$Z_z\leqslant K\int_{R_z}G(\xi,Z_\xi)\,\mathrm{d}B_\xi,$$

可得 $Z\equiv 0$.

则方程 (3.22) 的解存在且满足轨道唯一性.

证明. 考虑如下的逐次逼近：

$$\left\{\begin{array}{lll}X_z^0&=&X_0,\\X_z^n&=&X_0+\int_{R_z}\sigma(\xi,X^{n-1})\,\mathrm{d}W_\xi+\int_{R_z}b(\xi,X^{n-1})\,\mathrm{d}\xi\\&&+\int_{R_z}\alpha(\xi,X^{n-1})\,\mathrm{d}\Lambda_\xi+\int_{R_z}\beta(\xi,X^{n-1})\,\mathrm{d}N_\xi,\qquad n\in\mathbb{N}.\end{array}\right.\tag{3.23}$$

注意到 $X^0=X_0\in\mathfrak{L}^p_{\rm loc}(\mathfrak{D})$, 我们首先证明 $\forall n\in\mathbb{N}$, $X^n\in\mathfrak{L}^p_{\rm loc}(\mathfrak{D})$. 固定 $Z=(S,T)>0$, 考虑 $z\leqslant Z$. 若对 $n\in\mathbb{N}$, $X^{n-1}\in\mathfrak{L}^p_{\rm loc}(\mathfrak{D})$, 由 (1a), (1b), Hölder 不等式， Burkholder-Davis-Gundy 不等式，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\sup_{\zeta\leqslant z}|X^n_\zeta|^p)\\\leqslant\ &5^{p-1}\mathbb{E}\left(|X_0|^p\right)+5^{p-1}C_p(ST)^{\frac{p}{2}-1}\int_{R_z}\mathbb{E}\|\sigma(\xi,X^{n-1})\|^p\,\mathrm{d}\xi\\&+5^{p-1}(ST)^{p-1}\int_{R_z}\mathbb{E}|b(\xi,X^{n-1})|^p\,\mathrm{d}\xi+5^{p-1}(\Lambda_Z)^{p-1}\int_{R_z}\mathbb{E}|\alpha(\xi,X^{n-1})|^p\,\mathrm{d}\Lambda_\xi\\&+5^{p-1}C_p(\Lambda_Z)^{\frac{p}{2}-1}\int_{R_z}\mathbb{E}|\beta(\xi,X^{n-1})|^p\,\mathrm{d}\Lambda_\xi\\\leqslant\ &5^{p-1}\mathbb{E}\left(|X_0|^p\right)+5^{p-1}\left(C_p(ST)^{\frac{p}{2}-1}+(ST)^{p-1}+(\Lambda_Z)^{p-1}+C_p(\Lambda_Z)^{\frac{p}{2}-1}\right)\\&\int_{R_z}H\left(\xi,\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant\xi}|X^{n-1}_\zeta|^p\right)\right)\mathrm{d}B_\xi\\=\ &5^{p-1}\mathbb{E}\left(|X_0|^p\right)+K\int_{R_z}H\left(\xi,\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant\xi}\|X^{n-1}_r\|^p\right)\right)\mathrm{d}B_\xi,\end{aligned}$$

其中 $K=5^{p-1}\left(C_p(ST)^{\frac{p}{2}-1}+(ST)^{p-1}+(\Lambda_Z)^{p-1}+C_p(\Lambda_Z)^{\frac{p}{2}-1}\right)$. 由 (1c), 存在 u_t 满足

$$u_z=u_0+K\int_{R_z}H(\xi,u_\xi)\,\mathrm{d}B_\xi,$$

其中 $u_0 \geqslant 5^{p-1}\mathbb{E}(|X_0|^p)$. 注意到 $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta^0|^p\right) = \mathbb{E}(|X_0|^p) \leqslant u_z$, 由归纳法可知，若 $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta^{n-1}|^p\right) \leqslant u_z$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta^n|^p\right)\\
\leqslant\ & u_0 + K\int_{R_z} H(\xi, u_\xi)\,\mathrm{d}B_\xi\\
=\ & u_z. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

而且由于 $\sigma(\cdot, X^{n-1})$ 为双参数可测适应 l^2 值过程，$\beta(\cdot, X^{n-1}) \in \mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 再次用 (1a) 和 (1b) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{R_z}\mathbb{E}\|\sigma(\xi, X^{n-1})\|\,\mathrm{d}\xi\\
\leqslant\ & \left(\int_{R_z}\mathbb{E}\|\sigma(\xi, X^{n-1})\|^p\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{2}{p}}(st)^{\frac{p-2}{p}}\\
\leqslant\ & \left(\int_{R_z} H\left(\xi, \mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant\xi}|X_\zeta^{n-1}|^p\right)\right)\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{2}{p}}(ST)^{\frac{p-2}{p}}\\
\leqslant\ & \left(\int_{R_z} H(\xi, u_Z)\,\mathrm{d}B_\xi\right)^{\frac{2}{p}}(ST)^{\frac{p-2}{p}} < +\infty,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int_{R_z}\mathbb{E}|\beta(\xi, X^{n-1})|^2\,\mathrm{d}\Lambda_\xi\\
\leqslant\ & \left(\int_{R_z}\mathbb{E}|\beta(\xi, X^{n-1})|^p\,\mathrm{d}\Lambda_\xi\right)^{\frac{2}{p}}(\Lambda_z)^{\frac{p-2}{p}}\\
\leqslant\ & \left(\int_{R_z} H\left(\xi, \mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant\xi}|X_\zeta^{n-1}|^p\right)\right)\,\mathrm{d}\Lambda_\xi\right)^{\frac{2}{p}}(\Lambda_Z)^{\frac{p-2}{p}}\\
\leqslant\ & \left(\int_{R_z} H(\xi, u_Z)\,\mathrm{d}B_\xi\right)^{\frac{2}{p}}(\Lambda_Z)^{\frac{p-2}{p}} < \infty,
\end{aligned}$$

即

$$\sigma(\cdot, X^{n-1}) \in \mathcal{L}^2(W),$$

以及

$$\beta(\cdot, X^{n-1}) \in \mathcal{L}^2(N).$$

由命题 3.20 和命题 3.12 可知 X^n 有定义，且 $X^n \in \mathfrak{L}_{\mathrm{loc}}^p(\mathfrak{D})$.

另一方面，同理我们有

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X^m_\zeta - X^n_\zeta|^p\right) \\
\leqslant\ & 4^{p-1}C_p(ST)^{\frac{p}{2}-1}\int_{R_z}\mathbb{E}\|\sigma(\xi,X^{m-1})-\sigma(\xi,X^{n-1})\|^p\,\mathrm{d}\xi \\
& +4^{p-1}(ST)^{p-1}\int_{R_z}\mathbb{E}|b(s,X^{m-1})-b(s,X^{n-1})|^p\,\mathrm{d}\xi \\
& +4^{p-1}(\Lambda_Z)^{p-1}\int_{R_z}\mathbb{E}|\alpha(\xi,X^{m-1})-\alpha(\xi,X^{n-1})|^p\,\mathrm{d}\Lambda_\xi \\
& +4^{p-1}C_p(\Lambda_Z)^{\frac{p}{2}-1}\int_{R_z}\mathbb{E}|\beta(\xi,X^{m-1})-\beta(\xi,X^{n-1})|^p\,\mathrm{d}\Lambda_\xi \\
\leqslant\ & 4^{p-1}\left(C_p(ST)^{\frac{p}{2}-1}+(ST)^{p-1}+(\Lambda_Z)^{p-1}+C_p(\Lambda_Z)^{\frac{p}{2}-1}\right) \\
& \int_{R_z}G\left(\xi,\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant\xi}|X^{m-1}_\zeta - X^{n-1}_\zeta|^p\right)\right)\mathrm{d}B_\xi \\
\leqslant\ & K\int_{R_z}G\left(\xi,\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant\xi}|X^{m-1}_\zeta - X^{n-1}_\zeta|^p\right)\right)\mathrm{d}B_\xi.
\end{aligned}
$$

令

$$Z_z = \varlimsup_{m,n\to\infty}\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X^m_\zeta - X^n_\zeta|^p\right),$$

由 (3.24) 式， (2a) 和 Fatou 引理易得

$$Z_z\leqslant K\int_{R_z}G(\xi,Z_\xi)\,\mathrm{d}B_\xi.$$

用 (2c) 立得 $Z\equiv 0$, 故有

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X^m_\zeta - X^n_\zeta|^p\right)=0. \tag{3.25}$$

我们用 $\mathcal{D}_Z$ 表示从 $[0,Z]$ 到 $\mathbb{R}$ 的右连左极映射全体． $\forall X\in\mathcal{D}_Z$, 定义

$$\|X\|_{\mathcal{D}_Z}=\sup_{z\leqslant Z}|X_z|,$$

则 $(\mathcal{D}_Z,\|\cdot\|_{\mathcal{D}_Z})$ 为 Banach 空间，故 $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{D}_Z)$ 也为 Banach 空间. 又 (3.25) 式说明 $\{X^n,n\in\mathbb{N}\}$ 为 $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{D}_Z)$ 中的 Cauchy 列，故其极限过程存在，设为 X. 由 X^n 的右连左极性可知 Z 为一双参数右连左极半鞅. 在 (3.23) 式中令 $n\to\infty$, 取 $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{D}_Z)$ 中的极限，易证 $\forall z\leqslant Z$, X 满足方程 (3.22), 即我们已证明方程 (3.22) 的解的存在性.

若 X 和 X' 为方程 (3.22) 的两个解，同上可得 $\forall z\leqslant Z$, 有

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta - X'_\zeta|^p\right)\leqslant K\int_{R_z}G\left(\xi,\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant\xi}|X_\zeta - X'_\zeta|^p\right)\right)\mathrm{d}B_\xi,$$

和

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta - X'_\zeta|^p\right) \equiv 0,$$

这样我们证明了方程 (3.22) 的解的唯一性. 显然, $X \in \mathfrak{L}^p_{\rm loc}(\mathfrak{D})$, 且满足 $\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta|^p\right)\leqslant u_z$. 证毕. □

注 3.25 设 $G(z,u)=\lambda(z)\gamma(u)$, 其中 λ 为双参数非负局部可积函数, $\gamma:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 为连续增函数, 满足 $\gamma(0)=0$ 且 $\int_{0^+}\frac{1}{\gamma(u)}\,\mathrm{d}u=+\infty$. 设 Λ 满足 $\forall z\in\partial\mathbb{R}^2_+$, 有 $\Lambda_z=0$, 则 G 满足引理 3.19(2) 中的条件. 若再设 $\gamma(u)$ 或 $\frac{\gamma(u)^2}{u}$ 为凹函数, σ,b,α,β 为非随机的, 满足 $\forall z>0$, $X,Y\in\mathfrak{D}$, 有 $\|\sigma(z,0)\|$, $|b(z,0)|$, $|\alpha(z,0)|$, $|\beta(z,0)|\in\mathcal{L}^p_{\rm loc}(\mathbb{R}^2_+,\,\mathrm{d}B_z)$, 且

$$\begin{aligned}&\|\sigma(z,X)-\sigma(z,Y)\|^p+|b(z,X)-b(z,Y)|^p+|\alpha(z,X)-\alpha(z,Y)|^p\\&+|\beta(z,X)-\beta(z,Y)|^p\leqslant\gamma\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta-Y_\zeta|^p\right),\end{aligned}\tag{3.26}$$

则 σ,b,α,β 满足定理 3.24 中的 (1a)-(1c) 和 (2a)-(2c), 其中

$$H(z,u) \;=\; 2^{p-1}\left(4G(z,u)+\|\sigma(z,0)\|^p+|b(z,0)|^p+|\alpha(z,0)|^p+|\beta(z,0)|^p\right).$$

故我们的结果为 Liu(参看 [24]) 的结果的推广.

3.4 由无穷个 Brown 单驱动的随机微分方程

本节将证明第2章的结果推广到双参数的情形仍然成立.

考虑如下双参数非 Markov 型随机微分方程:

$$X_z = x+\int_{R_z}\sigma(\xi,X)\,\mathrm{d}W_\xi+\int_{R_z}b(\xi,X)\,\mathrm{d}\xi,\tag{3.27}$$

其中 $W=(W^1,W^2,\cdots)$, $\{W^j,j=1,2,\cdots\}$ 为某完备带流的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{F}_z)$ 上的无穷个相互独立的实值 Brown 单. 且有

(E1) $x\in\mathbb{R}$.

(E2) $\sigma:\mathbb{R}^2_+\times\mathfrak{W}\mapsto l^2$, 满足 $\sigma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2_+)\times\mathcal{B}(\mathfrak{W})/\mathcal{B}(l^2)$, 且 $\forall z\in\mathbb{R}^2_+$, $\sigma(z,\cdot):\mathfrak{W}\mapsto l^2$ 为 $\mathcal{B}_z(\mathfrak{W})/\mathcal{B}(l^2)$ 可测.

(E3) $b:\mathbb{R}^2_+\times\mathfrak{W}\mapsto\mathbb{R}$, 满足 $b\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2_+)\times\mathcal{B}(\mathfrak{W})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 且 $\forall z\in\mathbb{R}^2_+$, $b(z,\cdot):\mathfrak{W}\mapsto\mathbb{R}$ 为 $\mathcal{B}_z(\mathfrak{W})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测.

下面我们仿照有限维的情形定义弱解, 强解, 唯一强解等概念.

定义 3.26 若存在完备带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_z)$ 及其上的无穷个相互独立的 Brown 单 $W = (W^1, W^2, \cdots)$ 和连续适应过程 X, 满足

(1)$\forall z \in \mathbb{R}_+^2$, $\sigma(z, X) \in \mathcal{L}^2(W)$, $b(z, X) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$,

(2)$\forall z \in \mathbb{R}_+^2$, 方程 (3.27) a.s. 成立,

则称 (X, W) 为方程 (3.27) 的初值为 x 的 (弱) 解.

定义 3.27 (1) 只要 (X, W), (X', W') 为方程 (3.27) 具有相同初值的解 (不一定定义在同一概率空间上), X 和 X' 就在 $\mathfrak{W}$ 上具有相同的分布，则称方程 (3.27) 的解具有分布唯一性.

(2) 只要 (X, W), (X', W') 为方程 (3.27) 定义在同一概率空间上具有相同初值的解, X 和 X' 就无区别，则称方程 (3.27) 的解具有轨道唯一性.

定义 3.28 若存在函数 $\Phi : \mathbb{R} \times \mathfrak{W}_0^\infty \mapsto \mathfrak{W}$, 满足

(1)$\Phi \in \mathfrak{E}(\mathbb{R} \times \mathfrak{W}_0^\infty)$, 即对任何 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 概率测度 ν,

$$\Phi \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathfrak{W}_0^\infty)}^{\nu \times \mu^\infty} / \mathcal{B}(\mathfrak{W}),$$

(2)$\forall x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}_+^2$, $\Phi(x, \cdot) : \mathfrak{W}_0^\infty \mapsto \mathfrak{W}$ 为 $\overline{\mathcal{B}_z(\mathfrak{W}_0^\infty)}^{\mu^\infty} / \mathcal{B}_z(\mathfrak{W})$ 可测,

且使得方程 (3.27) 的解 (X, W) 满足

$$X = \Phi(X_0, W) \qquad \text{a.s.},$$

则称 (X, W) 为方程 (3.27) 的强解.

定义 3.29 若存在上述函数 Φ, 满足

(1)$\forall x \in \mathbb{R}$ 及某完备带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_z)$ 上的无穷个相互独立的 Brown 单 $W = (W^1, W^2, \cdots)$, $X = \Phi(x, W)$ 为方程 (3.27) 在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的初值为 x 的解,

(2) 对方程 (3.27) 的任一个解 (X, W), 有 $X = \Phi(X_0, W)$ a.s.,

则称方程 (3.27) 有唯一强解.

显然，若方程 (3.27) 有唯一强解，则其解具有轨道唯一性和分布唯一性.

下面的定理是有限维情况 (参看 Yeh [20]) 的推广，证明类似于定理 2.19.

定理 3.30 方程 (3.27) 有唯一强解等价于它存在一个弱解且其解具有轨道唯一性.

推论 3.31 方程 (3.27) 的解具有轨道唯一性则也具有分布唯一性.

由定理 3.24 及注 3.25, 我们有如下定理:

定理 3.32 设 λ 为双参数非负局部可积函数，ρ_1 和 ρ_2 为 $\mathbb{R}_+$ 上的增凹函数, 满足 $\rho_1(0)=\rho_2(0)=0$ 且 $\exists p\geqslant 2$, 使

$$\int_{0^+}\frac{u^{p-1}}{\rho_1^p(u)+\rho_2^p(u)}\,\mathrm{d}u=+\infty. \tag{3.28}$$

若 $\|\sigma(z,0)\|$ 和 $|b(z,0)|\in\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}^p$, 且 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, $X,Y\in\mathfrak{W}$, 有

$$\|\sigma(z,X)-\sigma(z,Y)\| \leqslant \sqrt[p]{\lambda(z)}\rho_1\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta-Y_\zeta|\right), \tag{3.29}$$

$$|b(z,X)-b(z,Y)| \leqslant \sqrt[p]{\lambda(z)}\rho_2\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta-Y_\zeta|\right), \tag{3.30}$$

则方程 (3.27) 有唯一强解.

注 3.33 在定理 3.32 的条件下，取 $Y=0$, 则 $\forall z\in\mathbb{R}_+^2$, $X\in\mathfrak{W}$, 有

$$\|\sigma(z,X)\| \leqslant \|\sigma(z,0)\|+\sqrt[p]{\lambda(z)}\rho_1\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta|\right), \tag{3.31}$$

$$|b(z,X)| \leqslant |b(z,0)|+\sqrt[p]{\lambda(z)}\rho_2\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta|\right). \tag{3.32}$$

由引理 2.27, 存在 $\tilde{\lambda}_p$ 为双参数非负局部可积函数，使

$$\|\sigma(z,X)\|+|b(z,X)|\leqslant\sqrt[p]{\tilde{\lambda}_p(z)}\left(1+\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta|\right). \tag{3.33}$$

由引理 1.41, 令 $\gamma(u)=\rho_1^p(u^{\frac{1}{p}})+\rho_2^p(u^{\frac{1}{p}})$, $G(z,u)=\lambda(z)\gamma(u)$, $H(z,u)=2^{p-1}(G(z,u)+\|\sigma(z,0)\|^p+|b(z,0)|^p)$ 或 $2^{p-1}\tilde{\lambda}_p(z)(1+u)$, 则 γ, G, H 满足注 3.25 中的条件.

注 3.34 考虑如下另一种逼近:

$$\begin{cases} X_z^0 = x, \\ X_z^n = x+\sum\limits_{j=1}^n\int_{R_z}\sigma_j(\xi,X^n)\,\mathrm{d}W_\xi^j+\int_{R_z}b(\xi,X^n)\,\mathrm{d}\xi, \qquad n\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.34}$$

显然，在定理 3.32 的条件下，方程 (3.34) 有唯一强解，且满足 $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta^n|^p\right)\leqslant u_z$. 同理可证 $\forall n>m$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta^m-X_\zeta^n|^p\right)\\ \leqslant\ & 3^{p-1}\int_{R_z}\mathbb{E}\left(\sum_{j=m+1}^n|\sigma_j(\xi,X^n)|^2\right)\mathrm{d}\xi+K\int_{R_z}\gamma\left(\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant\xi}|X_\zeta^m-X_\zeta^n|^p\right)\right)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

再若级数 $\sum\limits_{j=1}^\infty|\sigma_j(z,X)|^2$ 一致收敛，则有

$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z}|X_\zeta^m-X_\zeta^n|^p\right)=0,$$

和

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{\zeta\leqslant z} |X_\zeta^n - X_\zeta|^p\right) = 0.$$

致谢

衷心感谢指导教师任佳刚教授的指导.

非常感谢黄志远教授多年来对我的关心与指导.

作为我的良师益友，张希承副教授在我攻读博士学位及完成博士论文期间给了我非常有益的指导和交流，在此，对他表示诚挚的谢意. 同时，我也要感谢刘继成，感谢他在我论文的写作过程中给予了不少的帮助和鼓励.

借此机会我对我的父母以及丈夫何凯表示诚挚的谢意. 感谢他们在生活上对我的关心和照顾，在学业上给予我的极大的支持和帮助.

我也非常感谢李楚霖教授，巩馥洲研究员，高付清教授，刘次华教授，梁宗霞副教授，胡适耕教授，让光林副教授以及朱川平，李胜华，余凡及其他所有的老师一直以来对我的关心.

感谢同学及好友胡吉卉，吴莺，李楚进，殷宝健，陈家清，姚升保，李佩彦，王霞等给我的帮助和鼓励.

参考文献

[1] Malliavin P. The canonic diffusion above the diffeomorphism group of the circle. C.R.Acad.Sci.Paris, Série I, 1999, 329: 325∼329

[2] Airault H, Ren J. Modulus of continuity of the canonic Brownian motion "on the group of diffeomorphisms of the circle". J.Funct.Anal., 2002, 196(2): 395∼426

[3] Yamada T. On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations. J.Math.Kyoto Univ., 1981, 21: 501∼515

[4] Yamada T, Watanabe S. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. J.Math.Kyoto Univ., 1971, 11: 155∼167

[5] Taniguchi T. Successive approximations to solutions of stochastic differential equations. J.Differ. Equations, 1992, 96: 152∼169

[6] Yamada T, Ogura Y. On the strong comparison theorems for solutions of stochastic differential equations. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie Verw.Gebiete, 1981, 56: 3∼19

[7] Da Prato, Zabczyk J. Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge University Press, 1992

[8] Knoche C, Frieler K. Solutions of stochastic differential equations in infinite dimensional Hilbert spaces and their dependence on initial data. Bielefeld university, 2001

[9] Neidhardt A. Stochastic integrals in 2-uniformly smooth Banach spaces. University of Wisconsin, 1978

[10] Brzezniak Z, Carroll A. Approximations of the Wong-Zakai type for stochastic differential equations in M-type 2 Banach spaces with applications to loop spaces. Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag Heidelberg, 2003, 1832: 251∼289

[11] Pardoux E, Peng S. Adapeted solution of a backward stochastic differential equation. Systems Control Lett., 1990, 14: 55∼61

[12] Mao X. Adapted solutions of backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients. Stochastic Process.Appl., 1995, 58: 281∼292

[13] Hu Y, Peng S. Adapeted solution of a backward semilinear stochastic evolution equation. Stochastic Anal. Appl., 1991, 9: 445∼459

[14] Zhou S, Cao X. Adapeted solution of a backward semilinear stochastic evolution equation with non-Lipschitz coefficients. Acta Math.Sci., 2003, 23B(4): 485∼493

[15] Hitsuda M, Watanabe H. On stochastic integrals with respect to an infinite number of Brownian motions and its applications. Proc.of Intern.Symp.SDE., 1976, 57∼74

[16] Ren J, Zhang X. Stochastic flows for SDEs with non-Lipschitz coefficients. Bull.Sci.Math., 2003, 127: 739∼754

[17] Cairoli R. Sur une équation différentielle stochastique. C.R.Acad.Sci.Paris Série A, 1972, 274: 1173∼1742

[18] Yeh J. Existence of strong solutions for stochstic differential equations in the plane. Pac.J.Math., 1981, 97: 217∼247

[19] Yeh J. Existence of weak solutions to stochstic differential equations in the plane with continuous coefficients. Trans.Amer.Math.Soc., 1985, 290: 345∼361

[20] Yeh J. Uniqueness of strong solutions to S.D.E. in the plane with deterministic boundary process. Pac.J. Math., 1987, 128: 391∼400

[21] Nie Z. Uniqueness on two-parameter Itô's stochastic differential equations. Acta Math.Sinica., 1987, 30: 179∼186

[22] Liang Z. Existence and pathwise uniqueness of solutions for stochastic differential equations with respect to martingales in the plane. Stochastic Process.Appl., 1999, 83: 303∼317

[23] Chen X. Comparison theorem of the strong solution of the two-parameter Poisson type stochastic differential equation. Chinese Sci.Bull., 1989, 34(12): 881∼884

[24] Liu J. On the existence and uniqueness of solutions to stochastic differential equations of mixed Brownian and Poissonian sheet type. Stochastic Process.Appl., 2001, 94: 339∼354

[25] Ikeda N, Watanabe S. Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland/Kodanska, 1989

[26] 龚光鲁．随机微分方程引论 (第二版). 北京：北京大学出版社， 2000

[27] 何声武，汪嘉冈，严加安．半鞅与随机分析．北京：科学出版社， 1995

[28] Bass R. Probabilistic techniques in analysis. Springer-Verlag, 1995

[29] Nualart D. The Malliavin calculus and related topics. Berlin: Springer-Verlag, 1995

[30] Bihari I, A generalization of a lemma of Belmman and its application to uniqueness problem of differential equations. Acta Math.Acad.Sci.Hungar, 1956, 71∼94

[31] 黄志远．随机分析学基础 (第二版). 北京：科学出版社， 2001

[32] Stroock D, Varadhan S, Multidimensional Diffusion Processes. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979

[33] Le Gall. Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. Sém.Prob.XVII. Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1983, 986: 15∼31

[34] Rogers L, Williams D. Diffusions, Markov processes and martingales. 2. 2nd Edition. Cambridge: Cambridge University press, 2000

[35] Revuz D, Yor M. Continuous martingales and Brownian motion. Grund.Math.Wiss., 293, Springer-Verlag, 1991

[36] Cairoli R, Walsh J. Stochastic integrals in the plane. Acta Mathematica, 1975, 134: 111∼183

[37] Chevalier L. Martingales continues a deux parametres. Bull.Sci.Math., 1982, 106: 19∼62

[38] Adams R. Sobolev Spaces. New-York:Academic Press, 1978

[39] Airault H, Ren J, Zhang X. Smoothness of local times of semimartingales. C.R.Acad.Sci.Paris, Série I, 2000, 330: 719∼724

[40] Alòs E, Mazet O, Nualart D. Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter less that 1/2. Stochastic Process.Appl., 2000, 86: 121∼139

[41] Alòs E, Mazet O, Nualart D. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes. Ann.Probab., 2001, 29: 766∼801

[42] Alòs E, Nualart D. Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. Stochastics and Stochastics Rep., 2003, 75: 129∼152

[43] Ayache A, Léger S, Pontier M. Drap brownien fractionnaire. Potential Anal., 2002, 17: 31∼43

[44] Bass R, Chen Z. Stochastic differential equations for Dirichlet processes. Probab.Theory Relat.Fields, 2001, 121: 422∼446

[45] Bergh J, Lofstrom J. Interpolation spaces. Grund.Math.Wiss.223, Springer-Verlag, 1976

[46] Bouleau N, Hirsch F. Dirichlet forms and analysis on Wiener space. De Gruyter Stuies in Math.14, Walter de Gruyter, 1991

[47] Bouleau N, Yor M. Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semi-martingales. C.R.Acad.Sci. Paris, Série I, 1981, 292: 491∼494

[48] Cao G. Existence and pathwise uniqueness of solutions to stochastic differential equations in Banach space. To appear in Mathematica Applicata(China)

[49] Cao G, He K. On a type of stochastic differential equations driven by countably many Brownian motions. J.Funct.Anal., 2003, 203(1): 262∼285

[50] 曹桂兰，何凯．由可数个 Brown 单驱动的随机微分方程解的存在唯一性．数学物理学报 (中文版)(已录用)

[51] Cao G, He K. Strongly Markovian property of solutions on a type of SDEs driven by countably many Brownian motions, Preprint

[52] Cao G, He K. Quasi sure p-variation of fractional Brownian motion, Preprint

[53] Cao G, He K. Quasi sure p-variation of fractional Brownian sheet, Preprint

[54] Cao G, He K, Zhang X. Successive approximations of infinite dimensional SDEs with jump, Preprint

[55] Carmona L, Coutin G. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion, 1998, Preprint

[56] Carmona L, Coutin G, Montseny. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion. Annales de l'Institut H. Poincaré, 2003, 39(1): 27∼68

[57] Chen X. The path uniqueness of the solution of the two-parameter Poisson type stochastic differential equation. Chinese Sci.Bull., 1988, 33(9): 649∼652

[58] Coutin L, Nualart D, Tudor C. Tanaka formula for the fractional Brownian motion. Stochastic Process.Appl., 2001, 94: 301∼315

[59] Dai W, Heyde C. Itô's formula with respect to fractional Brownian motion and its application. J.Appl.Math.Stochastic Anal., 1996, 9: 439∼448

[60] Decreusefond L, Üstünel A. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. Potential Anal., 1998, 10: 177∼214

[61] Duncan T, Hu Y, Pasik-Duncan B. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I.Theory. SIAM J. Control Optim., 2000, 38: 582∼612

[62] Erraoui M, Nualart D, Ouknine Y. Hyperbolic stochastic partial diferential equations with additive fractional Brownian sheet. Stochastic Dynamics, 2003, 3: 121∼139

[63] Feyel D, de la Pradelle A. Fractional integrals and Brownian processes. Potential Anal., 1996, 10: 273∼288

[64] He K, Cao G. Successive approximations of solutions to stochastic differential equations with jump in the plane. To appear in Mathematica Applicata(China)

[65] 何凯，曹桂兰．连续局部鞅的无穷维随机积分表示．华中科技大学学报 (自然科学版)(已录用)

[66] 何凯，曹桂兰．由可数个 Brown 运动驱动的随机微分方程的唯一强解

[67] 何凯，曹桂兰．无穷维半线性倒向随机微分方程的逐次逼近

[68] He K, Ren J. Quasi sure quadratic variation of local times of smooth semimartingales. Bull.Sci.Math., 2004, 128(2): 91∼104

[69] He K, Zhang X. One dimensional SDEs with distributional drifts, Preprint

[70] Hu Y, Øksendal B. Fractional white noise calculus and applications to finance. Department of Mathematics, University of Oslo, 1999, 10, Preprint

[71] Hu J, Ren J. Infinite dimensinoal quasi continuity, path continuity and ray continuity of functions with fractional regularity. J.Math.Pures Appl., 2001, 80(1): 131∼152

[72] 黄志远，严加安．无穷维随机分析引论．北京：科学出版社， 2000

[73] Karatzas I, Shreve S. Brownian motion and stochastic calculus. New York: Springer-Verlag, 1988

[74] Kaspi H, Rosen J. p-variation for families of local times on lines. Sém.Prob.XXXIV. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2000, 1729: 171∼184

[75] Kusuoka S. On the foundations of Wiener-Riemannian manifolds, Stochastic analysis, path integration and dynamics. Pitman Res.Notes Math.Ser.. Longman Sci.Tech., Harlow, 1989, 200: 130∼164

[76] Kusuoka S, Stroock D. Application of the Malliavin calculus, Part I, Proc.Taniguchi Symp. on Stoch.Anal. (Itô K ed.), Katata/Kyoto 1982, North Holland Math Library 32, 1984, 271∼306

[77] Léger S, Pontier M. Drap brownien fractionnaire. C.R.Acad.Sci.Paris, Série I, 1999, 329: 893∼898

[78] Liang Z. Quasi sure quadratic variations of two-parameter smooth martingales on the wiener space. J. Math.Kyoto Univ., 1996, 36(3): 619∼640

[79] Liang Z, Zheng M. Estimates on moments of the solution to S.D.E. with respect to martingales in the plane. Stochastic Process.Appl., 1996, 62: 263∼276

[80] Lin S. Stochastic analysis of fractional Brownian motions. Stochastic and Stochastic Rep., 1995, 55: 121∼140

[81] Liu J, Ren J. Quasi sure product variations of two parameter smooth martingales on the Wiener space, Preprint

[82] Ma J, Yong J. Forward-backward stochastic differential equations and their applications. New York: Springer-Verlag, 1999

[83] Malliavin P, Nualart D. Quasi sure analysis of stochastic flows and Banach space valued smooth functionals on the Wiener space. J.Funct.Anal., 1993, 112: 287∼317

[84] Mandelbrojt S. Fonctions entières et transformées de Fourier, applications. The Mathematical Society of Japan, 1967

[85] Mandelbrot B, Van Ness J. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Rev, 1968, 10: 422∼437

[86] Marcus M, Rosen J. p-variation of the local times of symmetric stable processes and of Gaussian processes with stationary increments. Ann.Probab., 1992, 20: 1685∼1713

[87] Mazziotto G. Équation du filtrage pour un processes de Possion mélange à deux indices. Stochastic., 1980, 4: 89~119

[88] Nualart D, Vives J. Smoothness of local time and related Wiener functionals. Potential Analysis, 1992, 1: 257~263

[89] Perkins E. Local time and pathwise uniqueness for stochastic differential equations. Sém.Prob.XVI. Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1982, 920: 201~208

[90] Perkins E. Local time is a semimartingale. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie Verw.Gebiete, 1982, 60: 79~117

[91] Protter P. Stochastic intergration and differential equation: a new approach. New York: Springer, 1990

[92] Reid J. Estimate on moments of the solution to stochastic differential equations in the plane. Ann.Probab., 1983, 11: 656~668

[93] Ren J. Analysis quasi sûre des équation différentielles stochastiques. Bull.Sci.Math., 1990, 114: 187~213

[94] Ren J. Quasi sure quadratic variation of smooth martingales. J.Math.Kyoto Univ., 1994, 34(1): 191~206

[95] Ren J, Zhang X. Path continuity of fractional Dirichlet functionals. Bull.Sci.Math., 2003, 127(4): 368~378

[96] Ren J, Zhang X. Quasi sure analysis of two-parameter stochastic differential equations. Stochastic and Stochastic Rep., 2002, 72(3-4): 251~276

[97] Rogers L. Arbitrage with fractional Brownian motion. Math.Finance, 1997, 7: 95~105

[98] Rosen J. p-variation of the local times of stable processes and intersection local time. Seminar on Stochastic processes, 1991(Boston), Progress in Probability. Birkhauser, Boston, 1993, 33: 157~168

[99] Shigekawa I. On a quasi everywhere existence of the local time of the 1-dimensional Brownian motion. Osaka J.Math., 1984, 21: 621~627

[100] Shigekawa I. Sobolev spaces of Banach-valued functions associated with a Markov process. Probab.Theory Relat.Fields, 1994, 99(3): 425~441

[101] Situ R. On solutions of backward stochastic differential equations with jumps and applications. Stochastic Process.Appl., 1997, 66: 209~236

[102] Situ R. Backward stochastic differential equations with jumps and applications. Guangzhou: Guangdong Science and Technology Press, 2000

[103] Triebel H. Interpolation theory, function spaces, differential operators. North-Holland, Amsterdam, 1978

[104] Watanabe S. Fractional order Sobolev spaces on Wiener space. Prob.Theory Relat.Fields, 1993, 95: 175~198

[105] Wentzell A. A course in the theory of stochastic processes. McGraw-Hill Inc, 1981

[106] Wong E, Zakai M. Martingale and stochastic integrals for processes with multidimensional parameter. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie Verw.Gebiete., 1974, 29: 109~122

[107] Wong E, Zakai M. Weak martingales and stochastic integrals in the plane. Ann.Probab., 1976, 4: 570~586

[108] Wong E, Zakai M. Differentiation formula for stochastic integral in the plane. Stochastic Process.Appl., 1978, 6: 339~349

[109] 严加安，彭实戈，方诗赞，吴黎明．随机分析选讲．北京：科学出版社， 2000

[110] Zähle M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I.. Prob.Theory Relat. Fields, 1998, 111(3): 333~374

[111] Zähle M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus II.. 1999, Preprint

[112] 周少甫．(非 Lipschitz 系数) 倒向随机微分方程和随机微分效用： [博士学位论文]. 华中科技大学图书馆， 2000

[113] Zvonkin A. A transformation of the phase space of a process that removes the drift. Math.USSR Sbornik 2, 1974, 129~149

[114] Zvonkin A, Krylov N. On strong solutions of stochastic differential equations (in Russian). Proc.School-Seminal on Theor.Random Processes, Vilnius, Part II, 1975, 9~88

附录 攻读学位期间发表和完成的论文目录

[1] Cao G, He K. On a type of stochastic differential equations driven by countably many Brownian motions. J.Funct.Anal., 2003, 203(1): 262∼285

[2] 曹桂兰，何凯．由可数个 Brown 单驱动的随机微分方程解的存在唯一性．数学物理学报 (中文版)(已录用)

[3] Cao G, He K, Zhang X. Successive approximations of infinite dimensional SDEs with jump, Preprint

[4] Cao G. Existence and pathwise uniqueness of solutions to stochastic differential equations in Banach space. To appear in Mathematica Applicata(China)

[5] Cao G, He K. Quasi sure p-variation of fractional Brownian motion, Preprint

[6] Cao G, He K. Quasi sure p-variation of fractional Brownian sheet, Preprint

[7] He K, Cao G. Successive approximations of solutions to stochastic differential equations with jump in the plane. To appear in Mathematica Applicata(China)

[8] 何凯，曹桂兰．连续局部鞅的无穷维随机积分表示．华中科技大学学报 (自然科学版)(已录用)

[9] 何凯，曹桂兰．无穷维半线性倒向随机微分方程的逐次逼近

无穷维空间上的随机微分方程